
DEUXIÈME PARTIE.

MOUVEMENTS ET FIGURES DES CORPS CÉLESTES DÉDUITS DE LA THÉORIE DE LA GRAVITATION.

LA marche que l'astronomie a suivie pour atteindre le haut degré de perfectionnement auquel elle est arrivée, nous offre un exemple frappant de la sage réserve que doit s'imposer l'esprit humain dans l'étude des sciences naturelles. Ce n'est qu'après des siècles d'observations et lorsque les phénomènes ont été réunis en nombre suffisant, que le véritable système du monde nous a été dévoilé; toutes les tentatives que l'on avait faites pour devancer cette époque de maturité, ont été infructueuses. Avant de rechercher les causes, l'observateur pendant longtemps a dû se contenter d'enregistrer les faits, et s'astreindre seulement à les décrire avec une scrupuleuse exactitude; c'est à l'homme de génie qui vient ensuite, et dont la nature ne se montre jamais avare quand l'occasion le réclame, à les classer, à les coordonner, à trouver leurs liaisons entre eux, à en découvrir enfin dans le monde physique le principe général et commun. Quand la patience, le travail et le temps ont rassemblé les matériaux épars, c'est alors qu'il faut songer à élever l'édifice. Si



les astronomes de l'antiquité eussent suivi ces sages préceptes, sans doute nous aurions été privés de leurs ingénieuses spéculations sur les mouvements planétaires; mais ils auraient tracé à la science une route sûre dans laquelle elle se serait avancée à pas lents peut-être, mais sans jamais demeurer stationnaire et sans courir le risque d'être forcée de revenir en arrière pour réparer les erreurs d'une fausse direction. Il n'en a pas été ainsi : à peine possesseurs d'un petit nombre de phénomènes, découverts, il est vrai, avec une rare sagacité, ils voulurent, sur ces notions imparfaites, construire un système qui sans doute n'était dans leurs idées qu'un moyen de classer les faits, ou même peut-être qu'une ingénieuse hypothèse propre à expliquer quelques phénomènes isolés, mais que l'autorité de leurs noms et de leurs talents fit adopter ensuite pendant des siècles comme des vérités irrécusables et comme le principe fondamental du système du monde. Ainsi, dans leur impatience, en cherchant trop tôt à le soulever, ils appesantirent longtemps encore le voile qui nous dérobait la nature.

Les astronomes modernes ont suivi une voie plus sûre, ou du moins ils y ont été amenés par la force des choses. Nous avons vu comment les observations en se perfectionnant les avaient conduits à se dégager enfin des illusions de leurs sens et à rendre au soleil sa véritable place au centre du monde. Masse énorme dont la nature nous est inconnue, il tourne sur lui-même en $25\frac{1}{2}$; peut-être sa fixité même n'est-elle qu'apparente, et quelques observations semblent indiquer qu'il a lui-même un mouvement progressif et très-lent qui le pousse vers la constellation d'Hercule. Autour de cet astre et à diverses

distances de son centre, sont rangées les planètes qui circulent autour de lui et lui forment un magnifique cortège. Elles tournent toutes dans le même sens d'occident en orient, dans des courbes qui s'écartent peu de la forme circulaire, et dans des plans dont les inclinaisons mutuelles sont peu considérables. La terre elle-même n'est qu'une faible partie dans ce grand système; elle est, comme les autres planètes; un corps opaque qui reçoit et réfléchit la lumière du soleil. Quatre planètes, savoir : la Terre, Jupiter, Saturne et Uranus, sont accompagnées de satellites; les autres planètes, Mercure, Vénus, Mars et les planètes télescopiques, n'en ont point. Les satellites ou planètes secondaires circulent autour des planètes principales comme celles-ci autour du soleil; elles participent d'ailleurs au mouvement de translation de leurs planètes respectives autour de cet astre, en sorte que leurs mouvements relatifs n'en sont pas troublés.

Une étude approfondie du cours des planètes a montré que les orbites qu'elles décrivent ne sont pas circulaires, quoiqu'elles en diffèrent peu. On peut déterminer leur lieu moyen avec une exactitude suffisante dans une première approximation, en supposant qu'elles se meuvent dans des ellipses dont les éléments varient insensiblement dans les différents siècles. Les lois du mouvement sur ces courbes sont renfermées dans les trois principes suivants : les orbites des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe le foyer commun; les aires décrites sont proportionnelles aux temps, et les cubes des grands axes des orbites sont proportionnels aux carrés des temps des révolutions des différentes planètes.

Les comètes ne sont point comme les planètes renfermées dans une zone étroite de la sphère céleste; elles parcourent le ciel dans toutes les directions, tantôt dans le même sens que les planètes, tantôt dans le sens opposé, quelquefois du sud au nord, d'autres fois du nord au sud. Longtemps, à cause de leurs irrégularités, elles avaient paru des phénomènes particuliers sans aucune analogie avec les autres corps du système de l'univers; mais en rapportant leurs mouvements au centre du soleil au lieu de regarder la terre comme le pivot fixe autour duquel elles l'exécutent, Newton fit voir que les comètes sont assujetties aux mêmes lois que les mouvements planétaires. Les orbites qu'elles décrivent autour du soleil sont des courbes de même espèce que les orbites des planètes; seulement, tandis que celles-ci s'éloignent peu de la forme circulaire, les ellipses des comètes peuvent avoir des excentricités considérables et des inclinaisons quelconques sur le plan de l'orbe terrestre. C'est en vertu de la figure particulière de leurs orbites, que les comètes s'approchent quelquefois très-près du soleil, ce qui nous permet de les apercevoir, et qu'elles s'en éloignent ensuite à des distances si considérables qu'elles échappent entièrement à nos regards. Le nombre des comètes est illimité, et l'étendue des courbes qu'elles décrivent doit rendre en général leurs retours périodiques très-éloignés les uns des autres. Jusqu'ici on n'en connaît que trois dont le retour à des époques déterminées ait été constaté. Sans doute il en existe beaucoup d'autres, mais il y a trop peu de temps qu'on les observe assez soigneusement pour reconnaître avec certitude, dans celles que nous apercevons aujourd'hui, celles qui auraient paru à des époques

antérieures. La nature des comètes nous est généralement inconnue ; nous savons seulement qu'elles doivent être formées d'une matière très-subtile, puisque leurs queues laissent passer la lumière à travers leur immense profondeur, et que leurs masses n'ont jamais exercé aucune action appréciable sur les planètes près desquelles elles ont passé.

L'observation des taches qu'on aperçoit sur le disque de plusieurs planètes ou de leurs satellites, a fait connaître qu'elles avaient comme la terre un mouvement de rotation autour de leur centre. Tous ces mouvements s'exécutent dans le même sens que le mouvement de translation, c'est-à-dire d'occident en orient, et cette *coïncidence de direction de tous les mouvements planétaires* est sans contredit l'un des phénomènes les plus remarquables du système du monde (1).

La vitesse de rotation n'est pas la même pour les différentes planètes : Mercure, Vénus et Mars tournent sur leur centre comme la terre dans l'espace de 24 heures environ, mais le mouvement de rotation de Jupiter et de Saturne est beaucoup plus prompt, et ces deux planètes n'emploient que dix heures à peu près à faire une révolution autour de leur centre.

La vitesse de rotation de la terre est constante, et les observations les plus précises ne montrent aucune altération dans son mouvement diurne depuis les temps les plus reculés jusqu'à nos jours ; cette loi s'observe égale-

(1) La cause de cette uniformité dans le sens de tous les mouvements célestes est encore ignorée ; mais le calcul des probabilités a montré qu'il y a 1 à parier contre 4095 pour la probabilité d'une plus grande facilité de mouvement d'occident en orient que dans le sens contraire.

ment pour la lune, et sans doute elle s'étend à toutes les autres planètes et à leurs satellites. Les mouvements de rotation des corps célestes autour de leur centre de gravité, peuvent donc être généralement considérés comme uniformes ; mais les axes autour desquels ces mouvements s'exécutent ne demeurent pas constamment parallèles à eux-mêmes dans le mouvement de translation des planètes auxquelles ils appartiennent ; leur direction s'altère insensiblement dans les différents siècles, et ces variations séculaires produisent , pour la terre , le phénomène de la précession des équinoxes.

Les figures des planètes ne sont point celles de globes parfaitement sphériques ; ainsi les observations montrent dans Jupiter un aplatissement très-sensible ; les mesures directes prises à la surface de la terre indiquent également que sa figure est celle d'un sphéroïde aplati dans la direction des pôles et renflé sous l'équateur ; sans doute la même loi peut être étendue par analogie à tous les corps célestes qui sont doués d'un mouvement de rotation sur leur centre, quoiqu'il soit difficile de le constater par les observations. Les figures des planètes et des satellites ont ainsi un caractère général d'uniformité ; les seules différences qui les distinguent, dépendent de leurs dimensions respectives et des divers degrés de leur aplatissement.

Le soleil, les planètes, les satellites et les comètes constituent le système solaire proprement dit, et l'étude des mouvements de ces différents corps, de leurs figures, de leurs rapports mutuels, forme l'objet principal de l'astronomie théorique et pratique. C'est en effet celle qui doit nous intéresser le plus vivement, puisque la

terre que nous habitons forme elle-même l'une des parties constituanes de ce grand système. Mais si l'homme eût borné les facultés de son intelligence aux connaissances qui pouvaient lui être d'une utilité immédiate, il n'eût fait que de médiocres progrès dans la carrière des sciences. Au delà des limites du système solaire et à des distances dont le seul énoncé confond l'imagination, il existe d'autres corps qui durent d'abord attirer ses regards et fixer son attention; reculées aux extrémités de l'espace et attachées d'une manière invariable à la voûte des cieux, les étoiles ont servi aux astronomes de points de repère auxquels ils ont rapporté la position de tous les autres astres.

Les planètes et les comètes tirent leur lumière du soleil; mais les étoiles sont des corps lumineux par eux-mêmes, et peut-être sont-elles le centre d'autant de systèmes particuliers d'autres planètes, qu'elles éclairent et qu'elles animent comme le soleil donne la lumière et la vie à notre système planétaire.

Cette opinion, il est vrai, n'est qu'une conjecture à laquelle l'analogie donne beaucoup de probabilité, mais que la distance qui nous sépare des étoiles et la faiblesse de nos moyens d'investigation ne nous permettront sans doute jamais de vérifier. Cependant nos observations actuelles, tout imparfaites qu'elles sont, nous ont déjà permis de reconnaître des changements très-importants dans les positions des étoiles. Quelques-unes d'entre elles, outre les variations apparentes auxquelles toutes les étoiles sont assujetties, et qui ne sont qu'un effet du déplacement de l'axe terrestre ou de l'aberration de la lumière, ont un mouvement propre très-remarquable, et forment

entre elles des systèmes particuliers, qui circulent autour de leurs centres de gravité respectifs suivant des lois semblables à celles qui régissent les mouvements des planètes autour du soleil. Ce déplacement séculaire de certaines étoiles établit ainsi un rapprochement remarquable entre ces corps de nature si différente ; il montre que les mêmes lois qui régissent notre système solaire s'étendent jusqu'aux limites de l'espace, et atteste l'uniformité des vues de la nature dans la création de l'univers.

Mais quel est donc le puissant ressort qui donne ainsi l'activité, le mouvement et la vie à toutes les parties de ce grand ensemble ? Sans doute cette cause est unique, puisque les effets qu'elle produit ont entre eux une si admirable analogie. Jusqu'ici nous ne nous sommes attachés qu'à reproduire dans l'ordre le plus naturel l'exposition des phénomènes et celle des différentes hypothèses que les astronomes ont imaginées pour les lier entre eux, et pour montrer comment leur explication pouvait résulter de la disposition mutuelle de toutes les parties du système. Sans doute c'était déjà une belle gloire pour l'esprit humain que d'être ainsi parvenu à découvrir les vraies lois des mouvements des astres en se dégageant des illusions que leurs mouvements apparents nous présentent ; mais il osa davantage, et lorsqu'on eut réuni un assez grand nombre d'observations, Kepler, auquel nous avons vu que l'astronomie était redevable de ces grandes lois qui régissent les mouvements célestes et qui forment aujourd'hui la base de toute l'astronomie, avait soupçonné que ces mouvements si réguliers et si uniformes pour toutes les planètes devaient

résulter d'un seul et même principe, et il pressentit même la nature des forces qui les produisent. Mais, comme l'a justement observé l'illustre auteur de la *Mécanique céleste*, le moment n'était pas venu de franchir ce dernier pas, et la route qui pouvait y conduire devait être aplanie par les progrès de la mécanique et par l'invention du calcul infinitésimal.

Enfin Newton parut; aidé des immenses travaux de ses devanciers, et surtout des découvertes de Galilée sur la chute des graves, et des recherches d'Huygens sur les forces centrales, il osa transporter jusqu'aux cieux les lois qui régissent les déplacements des corps que nous observons sur la terre, et la vraie cause des mouvements célestes lui fut révélée. Dès lors l'univers matériel ne fut plus qu'une vaste machine dont les variations sont réglées par des lois immuables, et la théorie du système du monde qu'un vaste problème de mécanique dont la solution complète ne dépend que du plus ou moins de perfection des méthodes analytiques. En empruntant seulement à l'astronomie un petit nombre de données indispensables, le géomètre peut désormais embrasser dans ses formules tous les états passés et futurs du système planétaire, et prédire même, sans sortir pour ainsi dire de son cabinet, tous les phénomènes que l'observation la plus attentive doit révéler aux siècles futurs, ou bien vérifier l'exactitude des observations qui nous ont été transmises par les siècles passés. Quelques-unes de ces observations ont été faites par des hommes qui méritent toute notre confiance, si la théorie newtonienne n'est pas une vaine hypothèse, nous devons donc trouver une entière concordance entre les déduc-

tions de l'observation et les résultats du calcul. Eh bien ! c'est ce qui s'est en effet confirmé dans la plupart des cas ; la théorie est toujours sortie victorieuse de cette épreuve , et elle a représenté les observations anciennes dans les limites des erreurs que comportait leur imperfection. Quant aux observations modernes, elles sont représentées par la théorie avec une précision qui surpasse presque toujours celle que nos instruments d'optique nous permettent d'atteindre, et souvent même le calcul a précédé l'observation en faisant découvrir dans les corps célestes des mouvements qui lui avaient échappé à cause de leur petitesse, ou dont une longue suite de siècles aurait suffi à peine pour nous révéler les lois.

Certes, ce sont là d'admirables résultats ; nous qui venons de voir par quelle série de travaux persévérants les astronomes les ont si péniblement conquis, nous nous étonnerons moins sans doute qu'ils les aient forcés d'entrer à la fin dans le domaine de la science ; mais si, par quelque bouleversement dans l'ordre physique ou moral de l'univers, les traces de la route par laquelle l'homme s'est avancé vers le but qu'il voulait atteindre venaient à s'effacer un jour, peut-être penserait-on qu'ils ont eu des communications avec la Divinité, ceux qui ont pu en pénétrer ainsi la pensée et en découvrir tous les secrets. Cependant, quelle que fût la portée à laquelle l'esprit humain pouvait s'élever, sans le secours du calcul, ce merveilleux auxiliaire qui décuple pour ainsi dire ses facultés, la théorie du système du monde serait restée à peu près fermée à ses investigations. L'exposition même des grandes vérités qu'elle nous a révélées offre de nombreuses difficultés lorsqu'on se prive, pour les

énoncer, de l'appui du langage algébrique. Toutefois, il nous a paru qu'il ne serait pas absolument impossible de donner au moins une idée générale de la marche des raisonnements qui ont conduit à tant de sublimes découvertes, en n'employant que les notions les plus élémentaires de l'algèbre et de la géométrie, et que le rapprochement des déductions de la théorie des phénomènes reconnus par l'observation était devenu, dans l'état actuel de la science, le complément indispensable de tout ouvrage d'astronomie. Nous avons exposé dans la première partie de ce livre les principaux résultats qu'une contemplation assidue du ciel nous a fournis relativement aux mouvements et à la figure des corps célestes, nous nous occuperons spécialement dans cette seconde partie d'exposer ce que la théorie nous a appris sur ce double sujet.

CHAPITRE I^{er}.

DES LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT.

Inertie de la matière. — Des forces, de leur composition et de leur décomposition. — Mouvement uniforme. — Mouvement varié. — Lois de la chute des graves. — Théorie des forces centrales. — Force centrifuge. — Force centripète. — Principes généraux qui s'observent dans le mouvement d'un système de corps.

168. Avant de nous occuper de rechercher la nature des forces qui agissent sur les planètes, les comètes et les satellites, et qui produisent les mouvements auxquels ces corps sont assujettis, nous allons rappeler aussi succinctement que nous le pourrons les principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement; on suivra avec plus de facilité ensuite l'application que nous en ferons au système du monde.

C'est un principe généralement admis comme une loi de la nature, qu'un corps ne peut se donner par lui-même aucun mouvement, ni altérer d'une manière quelconque le mouvement qu'il a reçu, ce qui tient à ce qu'un corps matériel ne renferme en lui-même aucune raison pour se mouvoir dans un sens plutôt que dans un autre. Cette

tendance des corps à persévérer dans l'état de repos ou de mouvement est ce qu'on nomme *l'inertie de la matière*. La marche des corps célestes qui, depuis un si grand nombre de siècles, se conserve sans aucune altération sensible, nous offre, de cette tendance de la matière à persévérer dans son état de repos ou de mouvement, la preuve la plus manifeste que nous puissions choisir.

Toute cause perturbatrice qui tend à faire passer un corps de l'état de repos à l'état de mouvement, ou à modifier, d'une manière quelconque, le mouvement dont il est animé, se nomme *force* ou *puissance*.

Un point matériel soumis à l'action de plusieurs forces qui ne se font pas équilibre tend à se mouvoir dans une direction quelconque, et cette direction est unique, puisqu'il ne peut se mouvoir à la fois dans deux sens différents. Si l'on imagine une force dirigée suivant la ligne que le point tend à décrire, et dont l'effet équivale à l'action combinée des autres forces qui le sollicitent, il est évident que l'on pourra remplacer par cette force unique le système de forces que l'on avait considéré d'abord, et en faire désormais abstraction. La force ainsi déterminée s'appelle la *résultante* de celles qui ont mis le corps en mouvement, et celles-ci sont nommées les *composantes* de la première.

Si plusieurs forces agissant dans la même direction sont appliquées à un même point matériel, leur résultante est égale à leur somme ou à leur différence, selon qu'elles agissent dans le même sens ou dans des sens opposés; mais si les directions des deux forces forment un angle entre elles, la direction de la résultante

sera moyenne entre les deux autres, et l'on démontre par la géométrie que si sur les directions des deux forces données on prend (*fig. 86*) des longueurs AB, AC qui représentent ces forces, la résultante sera représentée en grandeur et en direction par la diagonale AD du parallélogramme ABCD construit sur les deux composantes AB et AC.

Ce théorème, qui est le fondement de toute la mécanique, donne le moyen de composer entre elles un nombre quelconque de forces agissant sur un point matériel. En effet, en composant successivement toutes ces forces deux à deux, on réduira ce cas général au cas plus simple que nous venons d'examiner. Réciproquement, si un point matériel est sollicité par une force donnée, on pourra substituer un système composé de plusieurs forces à l'action de cette force unique, pourvu que leur résultante lui soit égale.

Dans l'état de repos, toutes les forces qui agissent sur un point matériel parfaitement libre doivent se faire équilibre, c'est-à-dire que leur résultante doit se réduire à zéro. Si ce point n'est pas libre, s'il est forcé à se mouvoir sur une courbe ou une surface donnée, il suffit alors pour que l'équilibre ait lieu que la résultante soit perpendiculaire à la surface ou à la courbe sur laquelle il est assujetti; si ces conditions ne sont pas remplies, l'équilibre ne peut plus subsister, et le point matériel passe du repos à l'état de mouvement.

169. Lorsqu'un point matériel a été mis en mouvement par une force qui lui est appliquée, et qu'il a été ensuite abandonné à lui-même, il doit continuer à se mouvoir en ligne droite sur le prolongement de cette force, parce

qu'en vertu de l'inertie de la matière, il n'y a pas de raison en effet pour qu'il incline plutôt dans un sens que dans un autre. Si une nouvelle impulsion l'oblige à changer sa première direction, il persévère encore dans son mouvement rectiligne ; mais le point de l'espace vers lequel tend le mobile n'est plus le même.

Il résulte encore de la loi d'inertie ou de l'impossibilité où est un corps de se donner à lui-même aucun mouvement, que le mouvement d'un point matériel sollicité par une force qui agit instantanément sur lui, doit être uniforme, c'est-à-dire qu'il doit décrire des espaces égaux dans les mêmes intervalles de temps, jusqu'à ce que l'intervention d'une force nouvelle l'oblige à accélérer ou à ralentir le mouvement primitif qu'il a reçu. Ainsi donc, dans le mouvement uniforme, les espaces parcourus sont proportionnels aux temps employés à les décrire, le rapport de l'espace au temps est donc constant, ce rapport est ce que dans ce mouvement on nomme *la vitesse* ; on voit qu'elle est égale aussi à l'espace décrit par le mobile dans l'unité des temps.

Si le mobile, après avoir reçu une première impulsion, au lieu d'être abandonné à lui-même, reçoit, à des intervalles de temps déterminés, des impulsions nouvelles, qui s'exercent dans des sens différents de la première, la direction et la rapidité de son mouvement varieront continuellement, et l'assemblage de toutes les portions de lignes droites qu'il décrira, formera un polygone d'un nombre de côtés égal à celui des intervalles qui séparent les actions de la force d'impulsion. Si l'on suppose donc ces intervalles infiniment petits, le polygone se changera en une courbe continue, parce qu'une courbe

quelconque peut toujours être considérée comme un polygone d'une infinité de côtés.

La pesanteur qui fait tomber les corps à la surface de la terre, nous présente un exemple très-simple d'une force qui agit sans interruption. Elle exerce une action égale sur toutes les molécules de la matière, soit dans l'état de repos soit dans l'état de mouvement. Son intensité varie suivant les différents points que nous occupons sur le globe, sa direction change également avec l'horizon du lieu auquel elle est toujours perpendiculaire; mais comme les mouvements que l'on considère sur la terre, ont toujours infiniment peu d'étendue relativement à ses dimensions, on peut, dans les applications théoriques, regarder l'action de la pesanteur comme une force constante, et la supposer dirigée suivant des droites parallèles.

Pour qu'un corps décrive un orbite curviligne, il faut donc qu'après avoir reçu l'impulsion qui lui a donné le mouvement, il soit sollicité à chaque instant par une force dont l'action soit permanente; car si cette force venait à suspendre son action pendant un temps fini, le mobile, dans cet intervalle, continuerait à se mouvoir en ligne droite et d'un mouvement uniforme, dans la direction de la force qui le sollicite, il décrirait donc successivement les côtés d'un polygone rectiligne qui ne pourrait plus se confondre avec une courbe, qu'autant qu'on supposerait les sommets de ce polygone infiniment rapprochés, ou les intervalles de temps qui séparent les actions de la force motrice, infiniment petits.

Réciproquement, tout mouvement curviligne résulte nécessairement de la combinaison de deux forces dont

l'une au moins exerce, sur le mobile, une action continue. Les rapports qui peuvent exister entre les intensités et les directions de ces forces, déterminent ensuite la nature de l'orbite qu'il décrit. Un projectile qui sort de la bouche d'un canon nous offre l'exemple d'un mouvement produit par la combinaison de deux forces, l'une de projection qui abandonne le mobile après lui avoir communiqué une première impulsion, la seconde, la pesanteur, qui agit sur lui d'une manière continue. Le calcul montre que la courbe décrite en vertu de ces deux forces est une parabole, dont le grand axe est vertical et dont la première tangente est la droite, suivant laquelle a été dirigée l'impulsion initiale. Le mouvement est uniforme dans le sens horizontal, c'est-à-dire que les espaces croissent proportionnellement au temps, et dans le sens vertical il est le même que si le corps tombait suivant la verticale. Si la force de projection est dirigée perpendiculairement à l'horizon, la parabole se change en une ligne droite et se confond avec la verticale. Le mouvement des projectiles dans la parabole comprend donc, comme cas particulier, les lois de la chute des graves à la surface de la terre.

170. Supposons qu'un point pesant, en partant de l'état de repos, soit abandonné à lui-même; en vertu de la pesanteur il tombera vers la terre en suivant la direction de la verticale. Si l'on conçoit le temps divisé en intervalles infiniment petits, et si l'on suppose que l'action de la pesanteur au lieu d'être continue, soit séparée par ces intervalles (1), l'action de la pesanteur pourra être

(1) Il nous est impossible de savoir si la pesanteur et les forces

regardée comme une force constante pendant la durée de chaque intervalle, et le mouvement qui en résultera comme uniforme. Le mouvement des corps se trouvera ainsi partagé en une infinité de mouvements uniformes dont les vitesses, constantes pendant chacun des intervalles, varieront seulement d'un intervalle à l'autre.

En effet, au commencement du premier instant, la pesanteur communique au mobile une certaine vitesse en vertu de laquelle il décrit un espace déterminé. Dans le second instant, la force accélératrice reçoit un accroissement infiniment petit, la vitesse augmente proportionnellement, l'espace qu'elle fait décrire au corps dans ce second intervalle doit donc être plus considérable que dans le premier, et ainsi de suite. Les accroissements de la vitesse dépendent en général de la nature de la force accélératrice; si cette force est constante comme on peut supposer que l'est l'action de la pesanteur sur les corps peu éloignés de la surface terrestre, la vitesse augmentera proportionnellement au temps, et les espaces dont les corps tombent en partant du repos, croîtront comme les carrés des temps. De sorte que si dans le mouvement d'un corps accéléré par la pesanteur, on représente par

semblables, que nous observons dans la nature, agissent en effet sans interruption sur les corps qui leur sont soumis, ou si leurs actions sont séparées par des intervalles de temps dont la durée est insensible. Mais assurés que les résultats devaient être les mêmes dans les deux cas, les géomètres ont adopté la seconde hypothèse comme la plus commode pour le calcul, et surtout parce qu'elle leur a fourni le moyen de ramener immédiatement les lois d'un mouvement quelconque aux lois d'un mouvement uniforme.

1 l'espace dont il descend dans la première seconde de sa chute; il descendra de 4 unités dans la deuxième seconde, de 9 dans la troisième, et ainsi de suite, de manière que les espaces, parcourus pendant chaque intervalle, croîtront successivement comme les nombres 1, 3, 5, 7, 9, etc.

On prouve encore par la simple géométrie, que si l'on considère un triangle rectangle dans lequel l'un des côtés représente le temps de la chute d'un corps accélérée par la pesanteur, et l'autre côté la vitesse acquise à la fin de sa chute, la surface de ce triangle, égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur, représentera l'espace que le corps a décrit. On voit en effet que si l'on compare les chutes du corps pendant deux instants différents, les deux triangles qui en résulteront étant semblables, leurs côtés homologues seront proportionnels et leurs surfaces seront entre elles comme les carrés de ces côtés, les vitesses seront donc proportionnelles aux temps, et les espaces croîtront comme les carrés des temps ou comme les carrés des vitesses, conformément à la loi énoncée plus haut. Si, au bout d'un temps déterminé, la pesanteur venait à cesser tout à coup son action, le corps étant abandonné à lui-même, il continuerait à se mouvoir uniformément et décrirait, dans le même intervalle que celui de sa chute, un espace égal au produit de cet intervalle par la vitesse acquise; ce produit, en supposant que AB (*fig.* 87) représente le temps de la chute, BC la vitesse acquise, sera la surface du rectangle ABCD double du triangle ABC. Ainsi, un corps mu uniformément, en vertu de la vitesse qu'il acquiert en tombant d'une hauteur donnée, décrit,

dans un temps égal à celui de sa chute , un espace double de celui que l'action de la pesanteur lui a fait parcourir. Telles sont les lois de la chute des graves dans le vide , trouvées par Galilée. Ces lois , dont les anciens n'avaient eu aucune idée , sont l'une des plus belles découvertes des temps modernes. A voir leur admirable simplicité , l'on s'étonnerait sans doute qu'elles nous soient restées si longtemps cachées , si l'on ne savait que les découvertes les plus simples en apparence , ont été souvent celles qui ont coûté aux hommes le plus de temps et de travaux.

171. Toute force qui agit d'une manière continue sur un point matériel , se nomme généralement *force accélératrice* , soit que cette force soit constante comme la pesanteur dans un même lieu de la terre , soit qu'elle soit variable comme nous verrons que le sont les forces qui animent les corps célestes. Si un corps est composé d'un nombre quelconque de points matériels , on pourra , quelle que soit sa nature , le supposer décomposé en une infinité de points matériels de même masse , et considérer la force qui le sollicite comme la résultante de forces égales et parallèles qui agiraient sur chacun des éléments du corps ; or , la résultante d'un système de forces parallèles est égale à leur somme , la force motrice d'un corps est donc égale au produit de sa masse par la force accélératrice qui agit sur l'une de ses parties. Ainsi , par exemple , le poids d'un corps abandonné à lui-même est sa *force motrice* , et la pesanteur est sa *force accélératrice*.

La nature des forces accélératrices nous est en général inconnue , et nous ne pouvons juger de leur grandeur que

par les effets qu'elles produisent. Si une force agit instantanément sur un mobile, on suppose que son effet est proportionnel à son intensité, c'est-à-dire que plusieurs forces, agissant dans le même sens et dans la même direction; feront parcourir au corps qu'elles sollicitent, un espace égal à la somme des espaces que chacune d'elles lui aurait fait décrire séparément, les résultats qui dérivent de cette hypothèse sont d'ailleurs parfaitement d'accord avec les phénomènes observés, ce qui prouve qu'elle est en effet la loi de la nature.

Dans le mouvement uniforme, la vitesse ou le rapport de l'espace au temps employé à le décrire, est constante, et dans deux mouvements uniformes différents, les vitesses sont proportionnelles aux espaces parcourus dans les mêmes intervalles de temps; mais les espaces, d'après ce qui précède, doivent être proportionnels aux forces motrices; les vitesses, dans le mouvement uniforme, peuvent donc servir de mesure aux forces, et réciproquement.

Dans le mouvement varié qui résulte de l'action de la pesanteur et généralement d'une force accélératrice constante, la vitesse est variable; mais ses accroissements sont égaux en temps égaux, ou en d'autres termes, ils sont proportionnels au temps, quelle que soit d'ailleurs la vitesse dont le mobile est animé. Dans ce mouvement qu'on appelle uniformément accéléré, le rapport de la vitesse au temps est donc constant pour le même mouvement, et il augmente ou diminue pour deux mouvements différents proportionnellement à la force accélératrice, ce rapport est donc propre à lui servir de mesure (1). Ces

(1) Soit v la vitesse acquise au bout du temps t , et F la force ac-

deux manières d'exprimer les forces instantanées dans le mouvement uniforme, ou les forces continues dans le

celératrice, on aura généralement $F = \frac{v^2}{r}$. On peut donner à cette expression différentes formes utiles selon les circonstances. Nous avons vu que le produit de la vitesse par le temps est égal au double de la hauteur dont le mobile est tombé au bout du temps t ; en nommant donc h cette hauteur, on aura $2h = vt$, d'où l'on tire $v = \frac{2h}{t}$, et par conséquent $F = \frac{2h}{t^2}$; c'est-à-dire que dans le mouvement uniformément varié, on peut prendre également pour mesure de la force accélératrice, le double de l'espace parcouru divisé par le carré du temps. Enfin, les deux valeurs précédentes donnent en les combinant $F = \frac{v^2}{2h}$, c'est-à-dire que la force accélératrice est encore égale au carré de la vitesse divisé par le double de l'espace décrit.

Lorsque la force qui produit le mouvement varié n'est pas constante, les accroissements de la vitesse ne sont plus égaux en temps égaux; mais en concevant le temps divisé en intervalles infiniment petits, on pourra toujours supposer la force accélératrice constante pendant chacun de ces intervalles. Le mouvement du mobile se trouvera ainsi décomposé en une infinité de mouvements uniformément accélérés, mais les forces qui les produisent varieront d'un intervalle à un autre. Soit v la vitesse au bout du temps t , dv l'accroissement qu'elle prend pendant l'instant infiniment petit dt ; le mouvement du corps étant uniformément accéléré pendant cet intervalle, on aura pour la mesure de la force accélératrice qui le produit $F = \frac{dv}{dt}$; soit e l'espace que cette force fait décrire au mobile dans le même instant; on aura $e = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dt} \right) dt^2$, par conséquent $F = \frac{2e}{dt^2}$.

Ainsi, la force accélératrice aura pour mesure dans ce mouvement, la vitesse qu'elle communique au mobile pendant un instant infiniment petit, divisée par l'élément du temps, ou le double de l'espace qu'elle lui fait décrire dans le même intervalle, divisé par le carré de cet élément. On voit donc que les relations qui existent entre les forces accélératrices, les vitesses et les espaces parcourus, dans le mouvement varié produit par une force accélératrice quelconque, seront les mêmes que celles qui ont lieu dans le mouvement *uniformément accéléré*, pourvu qu'on suppose infiniment petit le temps pendant lequel cette force exerce son action.

mouvement uniformément varié, ne donnent point, il est vrai, la mesure absolue de ces forces, elles déterminent seulement leur rapport entre elles; mais cela suffit pour les comparer et opérer leur composition ou leur décomposition. Ainsi, lorsqu'on connaîtra les vitesses que deux forces communiquent séparément à un mobile, on déduira, par la règle du parallélogramme des forces, la vitesse qui serait due à la résultante de ces forces. Réciproquement lorsque la vitesse, imprimée à un mobile par la résultante de deux forces, sera connue, on pourra, en la décomposant, déterminer l'intensité de chacune d'elles.

172. Nous avons vu, n° 20, qu'un point matériel suspendu à l'extrémité d'un fil inextensible, formait ce qu'on a nommé un *pendule simple*. Le mouvement du pendule, ou les oscillations qu'il fait de part et d'autre de la verticale lorsqu'il en a été écarté, résultent fort simplement de l'action de la pesanteur. En effet, supposons d'abord l'appareil dans une situation verticale et qu'aucune vitesse initiale ne lui soit imprimée, le point matériel que son poids tend à faire tomber à la surface de la terre, se trouvant retenu par la résistance du fil qui détruit cette action, demeurera immobile. Si l'on écarte le pendule de sa position d'équilibre, et qu'ensuite on l'abandonne à lui-même, la pesanteur tendra à le ramener à sa première position, mais arrivé à la verticale, il la dépassera en vertu de la vitesse que sa chute lui a fait acquérir, et il parcourra, sur le cercle qu'il décrit, de l'autre côté de la verticale un arc précisément égal à celui de son premier écart. Pendant cet intervalle, la pesanteur dont l'action contrarie le mouvement du pendule, détruit suc-

cessivement une partie de la vitesse qui l'anime, et lorsqu'elle est complètement annulée, le pendule revient de nouveau vers la verticale qu'il dépasse bientôt; il continue ainsi indéfiniment son mouvement en faisant, de part et d'autre de cette droite, des oscillations qui ont la propriété si importante, pour la mesure du temps, d'être toutes *isochrones* ou d'égale durée, quel que soit l'angle dont le pendule a été écarté de sa situation primitive, c'est-à-dire l'amplitude des oscillations.

L'isochronisme des oscillations du pendule a lieu quelle que soit la courbe décrite par le point matériel suspendu à son extrémité; mais la propriété qu'a leur durée d'être indépendante de l'amplitude des oscillations, n'est rigoureuse que pour une courbe particulière que l'on nomme *cycloïde*; elle n'est qu'approchée pour le pendule circulaire qui est celui que l'on emploie ordinairement dans la pratique, et elle suppose que les oscillations sont très-petites, ou que le pendule a été très-peu dérangé de sa position d'équilibre, condition d'ailleurs facile à remplir. Observons encore que pour que le pendule, abandonné à lui-même, oscille indéfiniment de part et d'autre de la verticale, il faut supposer qu'il n'éprouve aucune résistance, soit par le frottement qui a lieu au point de suspension, soit par la résistance de l'air environnant; car ces deux causes, diminuant successivement l'étendue de ses oscillations, finiraient après quelque temps par le réduire à l'état de repos. C'est donc à cet appareil imaginaire qu'il faudra rapporter les différentes propriétés du pendule que nous allons exposer.

Le calcul montre que la durée des oscillations fort

petites d'un même pendule, ou le temps qu'il emploie à passer d'une de ses positions extrêmes à l'autre, des deux côtés de la verticale, est au temps qu'un point matériel emploierait à tomber d'une hauteur égale au double de la longueur du pendule, comme la demi-circonférence est au diamètre (1).

On en conclut : 1° la durée des oscillations fort petites de deux pendules de longueurs différentes et animés de la même pesanteur, sont entre elles comme les racines carrées de leurs longueurs ; en sorte que plus un pendule s'allonge, soit par l'accroissement de la température, soit par toute autre cause, plus les oscillations se ralentissent, et réciproquement. On peut au moyen de ce théorème calculer la longueur d'un pendule qui fait un nombre déterminé de vibrations dans un temps donné, ou bien lorsque sa longueur est connue, calculer la durée de ses oscillations.

2° Les durées des oscillations de deux pendules de même longueur, soumises à des pesanteurs différentes, sont entre elles comme les racines carrées de leurs intensités. Cette propriété offre un moyen très-simple de dé-

(1) Soit T la durée d'une oscillation, a la longueur du pendule, t le temps qu'un corps pesant mettrait à décrire $2a$ et enfin π le rapport de la circonférence au diamètre, on aura $T : t :: \frac{1}{2} \pi : 1$. D'après les lois de la chute des graves, on a $2a = \frac{1}{2} g t^2$, en désignant par g l'intensité de la pesanteur ou la vitesse que cette force, quelle que soit sa nature, imprime aux corps pesants dans la première seconde de leur chute, en tirant de là la valeur de t , et en la substituant dans la proportion précédente, on aura :

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

Expression très-simple d'où se déduisent aisément toutes les propriétés du pendule.

terminer les variations de la pesanteur à la surface de la terre, et l'on sait, en effet, que c'est par la différence des longueurs du pendule qui bat les secondes sous l'équateur et à la latitude de Paris, que Richer reconnut, pour la première fois, les accroissements de la pesanteur en allant de l'équateur au pôle, résultat que la théorie et les observations subséquentes ont depuis complètement confirmé.

3° Enfin, la relation qui existe entre la durée des oscillations et le temps qu'emploierait un corps pesant à descendre suivant la verticale, a fourni le moyen de déterminer la valeur absolue de la pesanteur terrestre dans un lieu donné. En effet, cette force a pour mesure le double de l'espace qu'elle fait décrire aux corps dans la première seconde de leur chute n° 171. Or, il est facile de s'assurer que cet espace est à la longueur du pendule qui bat les secondes dans le même lieu, comme le carré du rapport de la circonférence au diamètre est à l'unité; et comme la longueur du pendule qui bat les secondes dans un lieu déterminé est facile à connaître, on calculera par cette relation l'intensité de la pesanteur avec beaucoup plus de précision qu'on ne pourrait le faire par des expériences directes sur la chute des corps (1).

(1) En désignant par g l'intensité de la pesanteur, on aura, d'après l'expression de la durée des oscillations du pendule, $g = \frac{4\pi^2}{T^2}$ ou, en faisant T égal à $1''$, $g = 4\pi^2$. Le jour sidéral contenant 86164'', le pendule à secondes est celui qui fait 86164 oscillations dans cet intervalle. En désignant par a sa longueur, soit n le nombre de secondes que bat dans ce même espace de temps le pendule dont la longueur est l , les nombres d'oscillations de deux pendules dans un même temps, étant réciproquement proportionnels aux racines

C'est ainsi que Borda ayant trouvé que la longueur du pendule à secondes, à l'Observatoire de Paris, était de 0^m,99355, on en a conclu 9^m,80896 pour la mesure de la pesanteur ou plutôt pour le double de la hauteur dont la pesanteur fait tomber les corps dans la première seconde de leur chute à cette latitude.

Newton, ayant fait osciller successivement plusieurs corps de même poids, mais de matière différente, a reconnu que l'intensité de la pesanteur qui en résultait était sensiblement la même. M. Bessel a, depuis, répété des expériences semblables, et elles ont conduit à la même conclusion; c'est-à-dire, que la pesanteur exerce une action égale sur tous les corps placés en un même lieu de la surface de la terre, quelle que soit leur matière, et que par conséquent, dans le vide, elle leur communiquerait à tous la même vitesse en temps égal.

173. Considérons, comme second exemple d'un mouvement produit par l'action d'une force continue, celui d'un point matériel, assujetti à décrire la circonférence d'un cercle donné. Tout corps de sa nature tend à prendre un mouvement rectiligne et uniforme, il faut donc que le point qui décrit un cercle, soit soumis à l'action d'une force permanente, qui s'oppose à la tendance qu'il éprouve à s'échapper par la tangente au cercle, et l'oblige à y demeurer.

On appelle généralement *force centrale*, la puissance qui tend à rapprocher ou à écarter un corps du centre

carrées de leurs longueurs, on aura $1 : m :: \sqrt{l} : \sqrt{a}$. Il sera donc facile de calculer la longueur a du pendule qui bat les secondes à une latitude donnée, lorsqu'on aura observé le nombre d'oscillations que fait, dans un jour, un pendule dont la longueur est connue.

de son mouvement. La force centrale prend le nom de *force centripète* ou de *force centrifuge*, selon qu'elle est dirigée vers ce centre ou dans le sens opposé. Tout corps mu sur une courbe, tend à reprendre à chaque instant le mouvement rectiligne et uniforme qu'il tient de sa nature, et l'effort qu'il fait pour s'écarter de la courbe, suivant la direction de sa tangente, constitue spécialement la force centrifuge. La résistance qui lui est opposée, et qui oblige le corps à demeurer sur la courbe, forme la force centripète.

Soit $ABCD$ (*fig. 88*) une circonférence de cercle, que le point matériel m est supposé décrire d'un mouvement uniforme. Arrivé en A , le point m , en vertu de sa force d'inertie, tend à s'éloigner de la courbe, et il continuerait à se mouvoir en ligne droite, suivant la tangente AT , s'il n'était retenu par la force centripète, qui le sollicite vers le centre O de la circonférence. Cette force lui fait parcourir la droite MB , perpendiculaire à AT , en même temps qu'il décrit l'arc AB ; de sorte que si la force centrale venait tout à coup à cesser son action, le mobile, en vertu de sa vitesse acquise, décrirait l'espace AM , dans le même temps qu'il emploie à décrire l'arc AB ; tandis qu'au contraire, il descendrait vers le centre, suivant le rayon vecteur AO , de la hauteur Am , si la force centrale agissait seule. En supposant donc l'arc AB , infiniment petit, on pourra regarder le mouvement de A en M et celui de A en m , comme uniforme, et AM représentera la force d'impulsion, Am la force centripète dont le mobile est animé en arrivant au point A , car les forces, dans le mouvement uniforme, sont proportionnelles aux espaces qu'elles font décrire. En

vertu de ces deux forces réunies, le point m décrira donc la diagonale du parallélogramme construit sur les lignes qui les représentent, ou l'arc AB , qu'on peut supposer se confondre avec elle. Au point B , le mobile éprouve une nouvelle tendance à s'échapper, suivant la tangente en ce point, il est encore retenu par l'action de la force centrale, et décrit la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces. La direction rectiligne que le point matériel m tend toujours à prendre de sa nature, recevant ainsi à chaque instant une nouvelle inflexion, il finit par décrire toute l'étendue du cercle $ABCD$.

Si l'on suppose, comme nous le faisons, l'arc AB infiniment petit, la droite BM , perpendiculaire à AT , sera la mesure de la force centrifuge, qui sollicite le mobile au point B , et qui tend à l'éloigner du centre O du mouvement. BM représente également, comme nous l'avons vu, la force qui attire le mobile vers ce même point, la force centrifuge, dans le cercle, est donc toujours égale, et contraire à la force centripète. On voit de plus, que le mouvement sur le cercle étant supposé uniforme, l'arc décrit dans le second instant sera le même que dans le premier, la quantité BM , dont le point à la fin de cet instant s'écarte de la tangente qu'il tend à suivre, sera donc toujours la même, la force continue qui produit le mouvement circulaire, est donc une quantité constante.

On peut se former une idée très-exacte de l'action des forces centrales dans le mouvement circulaire, en supposant qu'au lieu d'être forcé à se mouvoir sur le cercle $ABCD$, le mobile est un point matériel suspendu à

l'extrémité d'un fil inextensible. Si l'on suppose que le point a été mis en mouvement par une impulsion dirigée perpendiculairement à la longueur du fil, et qu'il ne soit d'ailleurs soumis à l'action d'aucune force accélératrice, il décrira un cercle dont le rayon sera égal à la longueur du fil, et dont le centre sera le point de suspension. L'effort qu'il faudra faire pour retenir le fil, sera la mesure de la force centrale, et la tension qu'il éprouve, sera celle de la force centrifuge.

Or, c'est un fait facile à constater que l'effort que supporte le point de suspension, ou ce qui revient au même, la tension qu'éprouve le fil, est d'autant plus grande, toutes choses égales d'ailleurs, que sa longueur est moindre. En effet, plus le rayon d'un cercle est considérable, plus sa courbure est petite, et plus par conséquent il se rapproche de la ligne droite; la force centrifuge, que le mobile exerce pour s'échapper par la tangente, doit donc être plus considérable, lorsqu'il décrit un petit cercle, que lorsqu'il en décrit un grand. En général, on peut admettre, comme un résultat de l'observation, que la force centrifuge, dans le mouvement circulaire, est réciproquement proportionnelle, toutes choses égales d'ailleurs, au rayon du cercle, sur lequel le corps est emporté. L'expérience fait voir encore que la tension du fil augmente à mesure que le corps se meut avec plus de rapidité, et l'on s'est assuré que la force centrifuge, qu'exerce un corps mu dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, pour s'échapper par la tangente, est proportionnelle au carré de sa vitesse. De là, on peut conclure que les forces centrifuges d'un même corps, mu avec des vitesses quelconques, sur

des cercles différents, sont entre elles comme les carrés des vitesses divisés par les rayons des cercles qu'il décrit (1).

Cette loi, très-simple, donne le moyen de comparer entre elles les forces centrales de différents corps mus circulairement, quelles que soient d'ailleurs les autres circonstances de leur mouvement. En effet, soient deux corps M et m , qui décrivent les cercles dont les rayons respectifs sont R et r , avec les vitesses V et v ; les forces motrices de ces corps doivent être égales au produit de leurs masses, c'est-à-dire de la somme des points matériels qui les composent, par la force accélératrice qui

(1) Le rapport du carré de la vitesse au rayon du cercle parcouru par le mobile, étant constant dans le même mouvement et variant d'un mouvement circulaire à un autre, proportionnellement à la force accélératrice, ce rapport est essentiellement propre à lui servir de mesure. On peut d'ailleurs déduire très-simplement, par un calcul rigoureux, l'expression des forces centrales dans le mouvement circulaire, des premiers principes du mouvement varié exposés plus haut.

En effet, la force accélératrice étant constante dans le mouvement circulaire, elle doit avoir pour mesure le double de l'espace qu'elle fait parcourir au mobile dans un temps donné, divisé par le carré du temps (Voir la note page 488); en appelant donc τ le temps employé par le point m à parcourir l'arc AB (fig. 88), et F la force accélératrice, on aura :

$$F = \frac{2AM}{\tau^2}.$$

AM est ce qu'en trigonométrie on nomme le sinus verse de l'arc AB : la force accélératrice a donc pour mesure, dans le mouvement circulaire, le double du sinus verse de l'arc décrit dans un temps donné, divisé par le carré du temps. On peut lui donner une autre expression. En effet, si du point B on mène les droites AB , BC , aux extrémités du diamètre AC , en observant que, par une propriété de géométrie élémentaire, AB est moyenne proportionnelle

agit sur l'un de ces points. En nommant donc F et f les forces centrales des deux corps, on aura :

$$F : f :: \frac{MV^2}{R} : \frac{mv^2}{r} (a),$$

c'est-à-dire que les forces centrales de deux corps mus sur des cercles différents, sont entre elles comme les produits de leurs masses, multipliées par les carrés des vitesses, et divisées par les rayons des cercles qu'ils décrivent.

Soient C et c les circonférences décrites par les mobiles, T et t les temps des révolutions, on aura $V = \frac{C}{T}$, $v = \frac{c}{t}$; les circonférences sont d'ailleurs entre elles comme leurs rayons, ce qui donne $C : c :: R : r$; d'où l'on conclut :

$$F : f :: \frac{MR}{T^2} : \frac{mr}{t^2} (b)$$

c'est à dire que les forces centrales de deux corps mus dans des cercles différents sont entre elles comme les rayons des circonférences qu'ils décrivent, divisés par les carrés des temps employés à les décrire.

entre le diamètre AC et le segment adjacent AM , dans le triangle rectangle ABC , on aura la proportion :

$$AC : AB :: AB : AM = \frac{AB^2}{AC}.$$

Par conséquent, $F = \frac{2AB^2}{ACt^2}$; soit r le rayon du cercle décrit, on aura $AC = 2r$; l'arc AB étant très-petit, on peut supposer qu'il se confond avec la corde qui le sous-tend : le mouvement d'ailleurs étant uniforme, si l'on nomme v sa vitesse, on aura $AB = vt$; par conséquent, $AM = \frac{v^2 t^2}{2r}$; et enfin, pour l'expression de la force centrifuge dans le cercle, l'on aura :

$$F = \frac{v^2}{r}.$$

Il sera donc toujours facile d'estimer la force centrifuge d'un corps quand on connaîtra sa distance au centre du mouvement, et la grandeur de l'arc qu'il parcourt en un temps donné.

Si l'on suppose par conséquent que deux corps de poids égal décrivent dans le même intervalle des cercles de rayons inégaux, les forces centrifuges seront entre elles comme les rayons des cercles parcourus; en effet, on aura dans cette supposition $\frac{M}{T_1} = \frac{m}{t_1}$, et par conséquent, $F : f :: R : r$.

On peut conclure de là que sur deux parallèles terrestres différents, les forces centrifuges dues au mouvement de rotation de la terre, sont entre elles comme les rayons de ces parallèles. Soit PP' (*fig. 89*) l'axe de la terre, EO l'équateur, l la latitude du point M , la perpendiculaire MN , abaissée du point M sur l'axe de rotation, sera le rayon du parallèle que décrit M , et dans le triangle MON , on aura $MN = OM \cos. l$. La force centrifuge décroît donc de l'équateur aux pôles, proportionnellement au cosinus de la latitude.

La force centrifuge tend à écarter les corps de la surface de la terre; la pesanteur, au contraire, tend à les rapprocher: la force centrifuge est donc continuellement opposée à l'action de la pesanteur, en sorte qu'excepté au pôle, où elle est nulle, la pesanteur des corps est moindre dans tous les lieux du globe que si la terre n'avait point de mouvement de rotation. La pesanteur, en chaque point de la terre est dirigée suivant la verticale; la force centrifuge est dirigée suivant le rayon du parallèle que ce point décrit. A l'équateur, ces deux forces sont directement opposées l'une à l'autre, et en les comparant, on trouve que la force centrifuge est à la pesanteur comme l'unité est à 289; c'est-à-dire que la force centrifuge diminue, à cette latitude, la pesanteur des corps de $\frac{1}{289}$ du poids qu'ils auraient si la terre était im-

mobile (1). Cette diminution est moindre en tout autre lieu du globe, soit parce que la force centrifuge diminue d'intensité de l'équateur au pôle, soit parce que l'angle que fait sa direction avec la verticale va toujours en augmentant. En effet, en chaque point de la terre, l'angle que forme le rayon du parallèle avec la verticale est égal à la latitude du lieu. Ainsi, on a (fig. 88) $HMZ = EOM = l$; si l'on décompose donc la force centrifuge Ma en deux autres forces, l'une dirigée suivant la verticale, l'autre perpendiculaire à cette droite, la première de ces deux composantes Mb s'obtiendra en multipliant l'intensité Ma de la force centrifuge par $\cos. l$. Or, en prenant pour unité de force l'intensité de la pesanteur, la force centrifuge sous l'équateur aura pour mesure $\frac{1}{219}$, et sous un parallèle quelconque dont la latitude

(1) En nommant AB l'arc décrit par un mobile dans une seconde de temps, sur le cercle dont le rayon est r , nous avons vu que la force centrifuge avait pour expression $\frac{AB^2}{r}$. A l'équateur, le rayon r est à très-peu près égal à 6377284^m . La longueur de l'arc AB que décrit un point de l'équateur en une seconde de temps, en vertu du mouvement diurne, à raison de la circonférence entière pour un jour sidéral ou en $86,64''$, est d'environ $465^m,076$: au moyen de ces nombres, on trouve $\frac{AB^2}{r} = 0^m,033916$. Pour comparer la force centrifuge à la pesanteur, rappelons-nous que cette dernière force a pour mesure le double de l'espace qu'elle fait décrire aux corps dans la première seconde de leur chute; l'observation du pendule donne à l'équateur cet intervalle égal à $9^m,80896$. Ainsi la force centrifuge due au mouvement de rotation de la terre, est à la pesanteur, sous l'équateur, comme $0,033916$ est à $9^m,80896$, ou bien comme $1 : 289$ environ. Le rapport de ces deux forces est donc, à cette latitude, de $\frac{1}{219}$ à peu près, comme on le suppose dans le texte.

est l , la force centrifuge sera égale à cette même quantité multipliée par $\cos. l$; on aura donc $Ma = \frac{\cos. l}{289}$, et par conséquent $Mb = \frac{\cos.^2 l}{289}$ pour la diminution de la pesanteur due à la force centrifuge, sous un parallèle quelconque. Cette diminution des pôles à l'équateur, est proportionnelle, par conséquent, au carré du cosinus de la latitude.

La fraction $\frac{1}{289}$ est le carré de $\frac{1}{17}$; les forces centrifuges dans le même cercle sont d'ailleurs entre elles en raison inverse des carrés des durées des révolutions; il suit de là que si le mouvement de rotation de la terre était dix-sept fois plus rapide, ce qui supposerait la durée de sa révolution diurne de 1 h. 24' à peu près, la force centrifuge sous l'équateur deviendrait deux cent quatre-vingt-neuf fois plus grande qu'elle ne l'est aujourd'hui; elle serait donc égale à la pesanteur, et les corps resteraient suspendus et en équilibre sous l'action de ces deux forces.

Nous avons supposé jusqu'ici la terre parfaitement sphérique, et la pesanteur constamment la même en tous les points de sa surface; nous verrons bientôt que la pesanteur varie à raison de la différence de la figure de la terre à celle de la sphère; la diminution qui résulte de cette cause dans l'intensité de la pesanteur des pôles à l'équateur s'ajoute à celle qui provient de la force centrifuge, et varie comme elle proportionnellement au carré du cosinus de la latitude. La diminution totale de la pesanteur devient ainsi de $\frac{1}{289}$ à l'équateur.

Les deux proportions (a) et (b) renferment généralement toutes les lois des forces centrales, et il est facile

de les en déduire. C'est à Huygens que l'on en doit la découverte, mais il les avait données sans démonstration et ne les avait considérées que dans le cercle. Newton en étendit la théorie à toutes les courbes possibles, et il en conclut les lois générales du mouvement sur ces courbes. En effet, observons que par trois points pris sur une courbe quelconque, on peut toujours faire passer un cercle, et plus les points seront rapprochés, plus la circonférence approchera de se confondre avec la courbe dans toute l'étendue de l'arc qui les sépare. Si les distances comprises entre les points sont supposées infiniment petites, le cercle passera par deux éléments contigus de la courbe et deviendra ce qu'en géométrie on nomme *cercle osculateur*. Un corps mû sur une courbe quelconque tend, à s'en écarter en vertu du mouvement rectiligne et uniforme qui lui est naturel. Or, on peut toujours supposer qu'en chaque point de la courbe, le corps, pendant un instant infiniment petit, se meut sur la circonférence du cercle osculateur en ce point, sa force centrifuge est, par conséquent, la même que si le mouvement avait réellement lieu sur ce cercle, elle a donc pour mesure le carré de la vitesse divisé par le rayon du cercle osculateur. La grandeur de ce rayon change en chaque point de la trajectoire, ce qui montre que sur une courbe différente du cercle la force centrifuge varie sans cesse, tandis qu'elle est constamment de même grandeur dans une orbite circulaire.

174. L'analyse mathématique a fourni aux géomètres tous les secours qui leur étaient nécessaires pour s'élever de la considération des lois du mouvement d'un point matériel, à celle des mouvements d'un système de corps liés

entre eux d'une manière quelconque serait difficile, sans le secours du calcul, de donner même l'idée des moyens qu'ils ont employés pour y parvenir ; mais on a déduit des formules de l'analyse plusieurs principes généraux qui s'observent dans les mouvements de tout système de corps, et qu'il importe de faire connaître, parce qu'ils sont d'une application immédiate à la constitution de notre système planétaire.

Ces principes généraux du mouvement sont au nombre de quatre et peuvent s'énoncer ainsi :

1° Si un système de corps agissant les uns sur les autres d'une manière quelconque, et soumis à l'action d'une force dirigée vers un centre fixe, n'est assujéti d'ailleurs à l'action d'aucune force étrangère au système, la somme des aires tracées par les rayons vecteurs des différents corps du système sur un plan immobile passant par le point fixe, multipliées respectivement par les masses de ces corps, sera proportionnelle au temps. Ce théorème constitue le principe de la *conservation des aires*.

Si tous les corps n'étaient soumis qu'à leur action mutuelle et qu'il n'y eût point de centre d'action, on pourrait choisir alors arbitrairement l'origine des rayons vecteurs, et le principe précédent aurait lieu pour tous les points de l'espace.

2° Si un système de corps n'est soumis qu'à l'action mutuelle de toutes ses parties, et n'est sollicité par aucune force étrangère, le centre commun de gravité se meut en ligne droite et d'un mouvement uniforme (1) ;

(1) On appelle *centre de gravité* d'un corps ou d'un système de corps, un point remarquable par lequel passe constamment la résultante de toutes les forces parallèles, appliquées au système, quelle que

c'est-à-dire que son mouvement sera le même que s'il n'obéissait qu'à l'impulsion primitive qui le lui a communiqué ; ainsi donc, de même que par la loi d'inertie un point matériel ne peut, sans l'intervention d'une cause étrangère, changer le mouvement qu'il a reçu, de même un système de corps ne saurait altérer le mouvement de son centre de gravité par la seule action de ses parties les unes sur les autres : ce résultat constitue le principe de la *conservation du mouvement uniforme du centre de gravité*.

En général, quelles que soient les forces qui agissent sur un système de corps, le mouvement du centre de gravité du système est le même que si tous les corps y étaient réunis, et si toutes les forces qui sollicitent ces corps lui étaient directement appliquées.

3° La masse d'un corps, multipliée par le carré de sa vitesse, est ce qu'on nomme sa *force vive* ; si le système que l'on considère n'est soumis qu'à l'action mutuelle de toutes ses parties et à des attractions dirigées vers des centres fixes, la somme des forces vives des corps qui le composent, ou la force vive totale du système, est constante dans le cas même où plusieurs de ces corps seraient astreints à se mouvoir sur des lignes ou des surfaces données. Ce principe est celui de la *conservation des forces vives*.

soit la direction qu'on donne à ces forces, pourvu que l'on conserve leur parallélisme. La propriété qui caractérise ce point dans les corps solides qui ne sont soumis qu'à l'action de la pesanteur, c'est que s'il est supposé fixe, le corps reste en équilibre dans toutes les positions qu'on peut lui donner ; et, en effet, dans ce cas la résultante de toutes les forces appliquées au corps vient passer par le point fixe qui détruit son action.

4° Le quatrième et dernier principe peut s'énoncer ainsi : la somme des forces vives d'un système de corps, pendant le temps qu'il emploie à passer d'une position à une autre, est un *minimum*. Cette loi, qu'on avait longtemps cherché à déduire de considérations métaphysiques, en supposant que la nature emploie toujours dans les effets qu'elle produit le moins d'efforts possibles, résulte directement des formules analytiques, et se nomme le *principe de la moindre action*.

Le principe de la *conservation des aires* a lieu, quelle que soit la direction du plan que l'on choisit pour plan de projection ; mais parmi tous les plans que l'on peut mener par un même point, il y en a toujours un relativement auquel la somme des aires tracées par les projections des rayons vecteurs, multipliées respectivement par les masses des corps, est un *maximum*. Ce plan jouit d'une propriété très-remarquable ; c'est que cette même somme est nulle par rapport à tout plan qui lui est perpendiculaire. Ce plan demeure d'ailleurs toujours parallèle à lui-même, quels que soient les mouvements particuliers de chacun des corps du système ; on peut donc retrouver en tout temps sa position, ce qui rend sa considération très-précieuse dans la théorie du système du monde, comme on le verra bientôt.

Les quatre principes précédents s'observent dans les déplacements de tout système de corps, mais c'est surtout dans les mouvements des corps célestes que leur exactitude se manifeste par une admirable concordance des résultats du calcul et de ceux de l'observation. C'est que les causes secondaires, telles que les frottements, les résistances des milieux traversés, etc., qui entravent si

souvent les mouvements des corps que nous observons sur la terre, et qui rendent leur calcul mathématique presque impossible, disparaissent ou deviennent tout-à-fait insensibles quand il s'agit des corps célestes circulant dans l'immensité de l'espace, et nous n'observons plus alors que les effets des forces principales qui les animent.

CHAPITRE II.

DES FORCES QUI PRODUISENT LES MOUVEMENTS CÉLESTES ,

OU

LOI DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE.

Recherche de la cause qui fait décrire aux planètes , aux comètes et aux satellites , des orbites elliptiques. — Gravitation universelle. — La pesanteur terrestre n'est qu'un cas particulier de cette grande loi de la nature. — Conséquences qui s'en déduisent.

175. Après avoir rappelé, dans le chapitre précédent, les principes généraux de la mécanique, nous allons en faire l'application aux mouvements célestes. Nous montrerons d'abord comment les beaux théorèmes d'Huygens, sur les forces centrales, rapprochés des lois de Kepler sur les mouvements de translation des planètes, conduisirent Newton à la découverte de la grande loi de la pesanteur universelle. Nous verrons ensuite comment cette loi, combinée avec les principes généraux de la mécanique, suffit pour rendre raison des moindres variations observées dans les dispositions du système solaire.

Puisque les planètes se meuvent sur des courbes, en vertu du principe de l'inertie de la matière, il doit exister une puissance inconnue qui les retient dans leurs orbites, et les empêche à chaque instant de s'échapper,

suivant la ligne droite que tout corps abandonné à lui-même tend à décrire de sa nature. De ce que les orbes planétaires sont des courbes rentrantes, on peut encore conclure que le foyer des forces qui les sollicitent est situé dans l'intérieur de ces courbes. Mais, pour aller plus loin, il faut recourir aux circonstances particulières de leur mouvement, indiquées par l'observation.

Selon la première des belles lois découvertes par Kepler, *les aires décrites par les rayons vecteurs des planètes, dans leur mouvement autour du soleil, sont proportionnelles au temps*. Or, c'est un principe général de mécanique facile à démontrer, que, si un corps est sollicité par une force dirigée vers un centre fixe, les aires, tracées autour de ce point, seront proportionnelles au temps employé à les décrire.

Pour le faire voir, supposons qu'un corps se meuve sur la ligne courbe PAQ (fig. 90). Soit MA l'élément de la trajectoire qu'il décrit dans un instant infiniment petit; arrivé au point A, si aucune force n'agissait sur lui, il parcourrait dans l'instant suivant, d'un mouvement uniforme, sur le prolongement de MA, un espace Am égal à AM. Mais en vertu de la force centrale dirigée vers le point fixe C, à laquelle il est soumis, sa direction rectiligne MAT doit changer d'un instant à l'autre. Or, on peut supposer que, pendant un temps très-court t , la direction de la force centrale demeure toujours parallèle à elle-même, et en représentant par An son intensité, d'après la loi de la composition des forces, le mobile décrira la diagonale du parallélogramme Am M'n, dans le même temps qu'il aurait mis à décrire la ligne Am. Cela posé, les triangles Acm et ACM' seront équiva-

lents, puisqu'ils ont même base AC , et que leurs sommets sont situés sur une même ligne parallèle à la base; d'ailleurs, les triangles ACm et ACM sont équivalents, comme ayant même base et même hauteur: le triangle ACM' est donc équivalent au triangle ACM ; et comme les arcs AM , AM' sont, par hypothèse, parcourus dans le même intervalle de temps, il s'ensuit, en généralisant le résultat précédent, que les aires tracées autour du point fixe C , en vertu de la force qui fait décrire au mobile la courbe PAQ , sont égales en temps égaux, quelle que soit d'ailleurs l'intensité de cette force, pourvu que sa direction passe constamment par le point fixe.

Réciproquement, si la condition de la proportionnalité des aires aux temps employés à les décrire est remplie, la force qui sollicite le mobile est nécessairement dirigée vers le centre fixe autour duquel les aires sont tracées. En effet, dans la fig. 90, les triangles ACM et ACm sont égaux par construction, mais les triangles ACM et ACM' sont équivalents par hypothèse; donc le triangle ACM' est équivalent au triangle ACm : or, ces deux triangles ont même base AC , donc leurs sommets sont situés sur la même ligne mM' , parallèle à la base, mais mM' est parallèle à An . donc le prolongement de cette ligne passe par le point C , c'est-à-dire que la force qui agit sur le mobile au point A est dirigée suivant le rayon vecteur AC , ce qu'il s'agissait de démontrer.

176. Considérons, maintenant, les variations de la force centrale dans les différents points de l'orbite d'une planète. D'après la seconde loi de Kepler, nous savons que *les orbites planétaires sont des ellipses dont le soleil occupe un des foyers*. Soit donc (fig. 91) $ABCD$ l'ellipse

d'une planète m , S le soleil; nous avons nommé périhélie le point A , où la planète se trouve dans sa plus grande proximité du soleil, et aphélie le point B , où elle en est à sa plus grande distance. Il est d'abord évident que, puisque les rayons vecteurs vont en augmentant en allant du périhélie à l'aphélie, il faut que la vitesse de la planète soit moins considérable vers ce dernier point que vers le premier, pour que les surfaces décrites soient toujours égales en temps égaux, conformément à la première loi de Kepler. Or, les vitesses augmentent avec les forces qui les produisent; il résulte donc de la nature des courbes que décrivent les planètes, que l'intensité de la force attractive qui les sollicite vers le soleil doit diminuer quand leur distance à cet astre augmente, et, réciproquement, elle augmente quand cette distance diminue.

Comparons la loi de ces variations dans les deux points de l'orbite les plus remarquables, c'est-à-dire au périhélie et à l'aphélie. Nous avons vu que, tout mouvement étant de sa nature rectiligne et uniforme, tout corps qui se meut sur une courbe a une tendance qui le porte à chaque instant à s'échapper par la tangente à l'orbite qu'il décrit; cette tendance est ce que nous avons nommé *la force centrifuge*, et elle a pour mesure, n° 173, le carré de la vitesse du mobile, en chaque point de sa trajectoire, divisé par le rayon du cercle osculateur qui lui correspond. La courbure de l'ellipse étant la même au périhélie et à l'aphélie, les rayons des cercles osculateurs sont aussi les mêmes; les forces centrifuges de la planète en ces deux points sont donc entre elles comme les carrés des vitesses, c'est-à-dire qu'en nommant f et f' les forces centrifuges au périhélie et à l'aphélie, et

ν et ν' les vitesses correspondantes, on aura la proportion :

$$f : f' :: \nu^3 : \nu'^3. (a)$$

Représentons par z et z' les espaces angulaires que décrit la planète dans l'unité de temps lorsqu'elle est au périhélie et à l'aphélie, et par R et R' les rayons vecteurs qui se rapportent à ces deux points; le secteur elliptique ASa pourra être considéré comme un secteur circulaire, et il aura pour mesure $\frac{1}{2} R^2 z$; de même le secteur elliptique BSb aura pour mesure $\frac{1}{2} R'^2 z'$, et par la loi des aires on aura :

$$\frac{1}{2} R^2 z = \frac{1}{2} R'^2 z'.$$

Nous avons désigné par ν et ν' les vitesses absolues de la planète au périhélie et à l'aphélie; ces vitesses sont entre elles comme les espaces parcourus dans l'unité de temps; on a donc $\nu : \nu' :: Rz : R'z'$, et par conséquent, en vertu de l'équation précédente :

$$\nu : \nu' :: R' : R,$$

ou bien en élevant tous les termes au carré :

$$\nu^2 : \nu'^2 :: R'^2 : R^2,$$

la proportion (a) en vertu de celle-ci devient :

$$f : f' :: \frac{1}{R^3} : \frac{1}{R'^3}.$$

Or, au périhélie et à l'aphélie, la force centrifuge est évidemment égale à la tendance de la planète vers le soleil, puisque ces deux forces sont dirigées sur la même ligne droite et doivent se faire équilibre. Les forces centrales en ces deux points sont donc en raison inverse du carré des rayons vecteurs R et R' .

L'analogie nous permettrait déjà d'étendre la même loi à tous les points de l'orbite elliptique; mais l'analyse

mathématique a montré qu'en effet cette loi, que nous venons de vérifier dans deux points particuliers, est générale, et qu'elle s'exerce de la même manière à toutes les distances de la planète au soleil, c'est-à-dire que la tendance des planètes vers cet astre augmente ou diminue en raison inverse du carré de leurs distances à son centre.

176. Comparons enfin les variations de la force centrale en passant d'une planète à une autre. Supposons d'abord que les planètes se meuvent dans des orbites circulaires, ce qui s'éloigne peu de la vérité, puisque nous avons vu que les ellipses planétaires étaient toutes très-peu excentriques. On sait, d'après la théorie des forces centrales (p. 499), que si deux corps se meuvent dans des cercles concentriques, les forces qui les animent seront entre elles comme les rayons des cercles divisés par les carrés des temps des révolutions, c'est-à-dire que si F et f représentent les forces centrales des deux mobiles de même poids, R et r les rayons des cercles qu'ils décrivent, et T et t les temps de leurs révolutions, on aura la proportion :

$$F : f :: \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}.$$

Mais d'après la troisième loi de Kepler, *les carrés des temps des révolutions sont comme les cubes des grands axes des orbites*; en supposant les orbites circulaires, on aura donc :

$$T^2 : t^2 :: R^3 : r^3.$$

En divisant la première proportion par la seconde, on en déduit :

$$F : f :: \frac{1}{R^3} : \frac{1}{r^3},$$

c'est-à-dire que les forces qui sollicitent les planètes vers le soleil sont réciproquement proportionnelles aux carrés des rayons de leurs orbites supposées circulaires; elles seraient les mêmes pour deux planètes également éloignées du soleil.

Ainsi donc, chacune des lois observées dans les révolutions des corps célestes nous révèle un des principes de leurs mouvements, et nous sommes conduits, par une suite de raisonnements rigoureux, à ces trois résultats qui sont la clef de tous les mouvements célestes.

1° *Les planètes sont retenues dans leurs orbites par une force qui agit continuellement sur elles et qui est dirigée vers le centre du soleil.*

2° *Cette tendance augmente quand la planète approche du soleil; elle diminue quand elle s'en éloigne, et la loi de ces augmentations et de ces diminutions est celle du rapport inverse du carré des distances.*

3° *La force qui sollicite les planètes vers le soleil est la même pour toutes supposées à égales distances de cet astre, et elle ne varie d'une planète à une autre qu'à raison de la différence de leur éloignement du soleil.*

178. Cette tendance qui pousse les planètes vers le soleil se nomme *gravitation*, et les lois qui règlent son action forment les bases du vrai système de l'univers. Nous venons de parvenir à ces lois par une suite d'inductions très-vraisemblables sans doute, mais quoique cette méthode soit souvent utile dans la recherche des vérités physiques, elle ne suffirait pas pour mettre à l'abri de toute objection les principes fondamentaux d'une théorie aussi importante que celle de la gravitation. Pour les démontrer d'une manière incontestable, il faudrait prou-

ver que la tendance des planètes vers le soleil suit en effet la même loi dans tous les points de leurs ellipses qu'au périhélie et à l'aphélie, et qu'elle ne varie d'une planète à une autre qu'à raison des distances au soleil, quelle que soit d'ailleurs l'excentricité de leurs orbites. C'est ce que Newton a fait le premier ; il commença par chercher l'expression de la force qui, dirigée vers un centre fixe, fait décrire une ellipse au mobile qu'elle sollicite, et il prouva qu'en effet cette force est réciproque au carré du rayon vecteur. Il fit voir ensuite que la loi de la proportionnalité des carrés des temps aux cubes des grands axes entraîne la conséquence que cette force ne varie d'une planète à une autre qu'à raison de son éloignement du soleil, en sorte qu'elle serait la même pour toutes les planètes placées à égale distance de cet astre (1).

Deux planètes supposées également éloignées du soleil seraient donc attirées vers lui par des forces égales, et, abandonnées à elles-mêmes, elles s'y précipiteraient avec la même vitesse ; l'intensité de la force motrice de chaque planète est donc encore proportionnelle à sa masse, comme les poids des corps matériels à la surface de la terre.

Ces beaux résultats avaient d'abord été déduits par Newton de simples considérations géométriques ; ils ont été pleinement confirmés depuis, lorsque les progrès des sciences mathématiques ont permis d'appliquer à la théorie de la gravitation des méthodes plus savantes. En renversant le problème et en cherchant quelle est

(1) Voir la note 6.

la courbe qu'une force réciproque au carré des distances fait décrire à un mobile, l'analyse qui embrasse dans sa généralité tous les effets dépendants d'une même cause, a montré que cette courbe peut être une section conique quelconque, c'est-à-dire, non-seulement une ellipse, mais encore une parabole ou une hyperbole. La nature de la courbe dépend du rapport qui existe entre le mouvement primitif de projection et la force attractive; sa figure, de la direction suivant laquelle ce mouvement a été imprimé au mobile. Il peut donc exister des astres qui se meuvent sur des orbites paraboliques ou hyperboliques; mais comme ces courbes s'étendent à l'infini, ces astres ne seraient visibles pour nous qu'une seule fois lorsqu'ils reviendraient dans le voisinage du soleil, ils s'éloigneraient ensuite indéfiniment sans que nous pussions les suivre dans l'immensité des cieux. Ils n'auraient donc pas pour l'astronome l'intérêt qui s'attache aux astres qui circulent dans des orbites fermées, les seuls dont les retours soient assurés et dont l'étude puisse être pour nous de quelque utilité.

Newton a étendu aux comètes les lois qui régissent les mouvements des planètes autour du soleil. En effet, on a vu que, dans la partie de leur cours où nous pouvons les observer, la proportionnalité des aires au temps employé à les décrire est exactement observée, ce qui annonce que la force qui les sollicite est dirigée vers le centre du soleil. Leurs orbites sont en général des ellipses très-excentriques, qui se confondent sensiblement avec des arcs de parabole, dont le soleil occupe le foyer, lorsqu'elles se rapprochent de leur périhélie, seul point de leur orbite où nous puissions les apercevoir

la force qui les anime est donc réciproque au carré de leur distance à cet astre. Enfin, la grandeur des aires décrites par leurs rayons vecteurs suppose la loi des carrés des révolutions proportionnels aux cubes des grands axes, ce qui indique que cette force ne varie d'une comète à une autre comète, ou d'une comète à une planète, que par les distances différentes où elles sont du soleil.

Les lois de Kepler s'observent encore dans les mouvements des satellites autour de leurs planètes, et l'on peut en déduire les mêmes conséquences relativement aux forces qui les animent. Les satellites circulent d'ailleurs autour du soleil à très-peu près comme leurs planètes elles-mêmes; sans cela leurs mouvements seraient assujettis à des inégalités très-sensibles que l'observation n'a pas indiquées: ainsi, en même temps que les satellites se meuvent autour de leurs planètes, le système entier de la planète et de ses satellites est emporté d'un mouvement commun dans l'espace et retenu par la même force vers le soleil, en sorte que les mouvements relatifs des satellites, par rapport à la planète, sont les mêmes à très-peu près que si elle était en repos et que si ces satellites n'obéissaient qu'à l'action qu'elle exerce sur eux. Il faut conclure de là que les satellites sont attirés vers le centre du soleil par des forces réciproques aux carrés des distances.

Les planètes, les comètes et les satellites sont donc assujettis à la même loi de gravitation vers le soleil; et cette tendance n'est point particulière à cet astre; on l'observe encore dans l'action des planètes sur les satellites, où elle s'exerce de la même manière. C'est d'ailleurs un principe généralement admis en physique, que la réaction

est toujours égale et contraire à l'action (1); les planètes et les comètes réagissent donc sur le soleil et l'attirent comme elles en sont attirées; les satellites réagissent suivant la même loi sur leurs planètes et sur le soleil, et la gravitation de tous les corps célestes les uns vers les autres doit être regardée comme un principe incontestable qui résulte directement de l'observation de leurs mouvements.

Cette force d'attraction dont sont doués tous les corps du système solaire n'est pas une propriété qui leur appartienne en masse; elle pénètre également toutes leurs

(1) Soit M la masse du soleil, m celle d'une planète quelconque, r leur distance mutuelle, la force motrice produite par l'attraction du soleil sur la planète sera $f mM$, à l'unité de distance, et $\frac{f mM}{r^2}$ à la distance r , f représentant un coefficient constant, qui dépend du pouvoir attractif dont la matière est douée. De même, la force motrice du soleil, résultant de l'action de la planète, sera $\frac{f m M}{r^2}$, et comme ces deux forces sont égales et directement opposées, il s'ensuit que chaque planète exerce sur le soleil une réaction égale et contraire à l'action qu'elle en éprouve. Mais les effets qui résulteront de ces deux actions seront fort différents. En effet, les forces motrices ont pour mesure les produits des vitesses qu'elles produisent dans un instant infiniment petit, par les masses des corps auxquels elles sont appliquées; les vitesses que la même force motrice $\frac{f mM}{r^2}$ imprimera au soleil et à la planète seront donc réciproquement proportionnelles à leurs masses M et m , et par conséquent les espaces qu'ils parcourront en s'avancant l'un vers l'autre seront entre eux dans le même rapport; or, comme les masses des planètes sont toutes très-petites relativement à celle du soleil, il s'ensuit que l'attraction du soleil produira dans un temps donné des variations considérables dans les positions des planètes, tandis qu'il ne résultera de leur réaction sur cet astre que des déplacements à peu près insensibles.

molécules, et l'on peut admettre désormais au rang des vérités physiques les plus rigoureusement démontrées cette grande loi de la nature, savoir : que *toutes les molécules de la matière s'attirent en raison directe des masses et inverse du carré des distances.*

179. La pesanteur qui fait tomber les corps à la surface de la terre n'est elle-même qu'un cas particulier de cette loi générale. En effet, la pesanteur terrestre est une force de même nature que celle qui sollicite les planètes vers le soleil et les satellites vers les centres de leurs planètes ; elle pénètre de même toutes les parties de la matière ; elle est de même proportionnelle aux masses, et, placés dans le vide, tous les corps que nous connaissons se précipiteraient vers la terre avec la même vitesse, n° 172 ; enfin l'expérience prouve que l'action de la pesanteur diminue à mesure qu'on s'écarte du centre de la terre. Les distances auxquelles il nous est permis d'atteindre sont trop peu considérables, il est vrai, pour que nous puissions déterminer par l'observation la loi de cette diminution, mais nous avons dans le mouvement de translation de la lune autour de la terre, un moyen facile de reconnaître son identité avec celle des attractions célestes. En effet, supposons que la pesanteur terrestre s'étende jusqu'à la lune en suivant la loi de diminution de la gravité, un corps pesant placé à sa surface devra tomber vers la terre précisément de la même hauteur que tomberait dans le même temps la lune abandonnée à elle-même, si la force qui la retient dans son orbite et celle qui fait tomber les corps à la surface de la terre sont deux forces de même nature. Or, c'est ce qu'un calcul très-simple confirme exactement.

En effet, les expériences du pendule montrent que la pesanteur fait décrire aux corps placés près de la surface de la terre $4^m,90448$ dans la première seconde de leur chute; nous supposons que l'intensité de cette force varie en raison inverse du carré des distances au centre de la terre; la distance moyenne de la lune à ce centre est de 60,3141 rayons terrestres; en nommant donc h la hauteur dont un corps placé à la distance de la lune tomberait vers la terre en $1''$ de temps, on aura la proportion :

$$(60,3141)^2 : 1 :: 4^m,90448 : h = 0^m,0013482.$$

Comparons cette quantité à la hauteur dont l'attraction fait tomber la lune dans le même intervalle. Soit ABCD (fig. 88) l'orbite de la lune, AB l'arc très-petit qu'elle décrit dans une seconde, AM serait la quantité dont elle s'avancerait vers la terre sans la force de projection qui la maintient dans son orbite; c'est donc la hauteur dont l'attraction fait tomber la lune dans une seconde de temps. AM est ce que l'on nomme le *sinus verse* de l'arc AB, en supposant cet arc très-petit et en le désignant par rs , r étant le rayon du cercle ABCD, on a $AM = \frac{1}{2} rs^2$ (1). L'espace angulaire que la lune parcourt dans l'intervalle d'une seconde de temps est de $0'',5490$, et le rayon de l'orbe lunaire est de 384221000^m environ. On trouve ainsi : $AM = 0^m,0^m,0013609$, valeur à très-peu près égale à la valeur précédente de h , et qui n'en diffère, on peut le supposer, que par les quantités négligées dans le calcul, telles

(1) Voir la note, pag. 497.

que la force centrifuge de la terre, l'excentricité de l'orbe lunaire, etc.

La lune pèse donc vers la terre comme les corps matériels placés à sa surface. Il en est de même de tous les satellites par rapport à leurs planètes respectives, et des planètes relativement au soleil. La pesanteur terrestre n'est donc qu'un cas particulier d'une propriété attractive dont sont doués tous les corps célestes, et c'est cette analogie remarquée pour la première fois par Newton qui lui fit nommer cette tendance qu'ont tous les corps de la nature les uns vers les autres, *gravitation ou pesanteur universelle*.

180. Il resterait à découvrir quelle est la cause inconnue de ce phénomène, à vérifier si c'est en effet une attraction mutuelle que les corps éprouvent, ou s'ils sont soumis à l'action d'une force qui les pousse à se réunir; il faudrait reconnaître par quels agents l'influence de cette force se transmet, etc. Mais sans s'embarrasser de cette recherche, qui est plus du domaine de la physique que de l'astronomie, il suffit aux géomètres de savoir que tous les phénomènes célestes s'accomplissent en effet comme si cette force d'attraction était réellement une propriété inhérente à la matière, et que la plus légère variation soit dans son intensité, soit dans sa direction vers le centre du soleil, ou des planètes, produirait dans les mouvements des planètes et des satellites des inégalités en désaccord avec tout ce que l'observation nous présente. Nous verrons au contraire qu'il suffit d'introduire l'expression de cette force dans les formules de la mécanique, pour en voir résulter toutes les circonstances des mouvements planétaires, et qu'il n'y a pas une seule

des inégalités reconnues par les astronomes dont on ne soit parvenu à déterminer par ce moyen et les causes et les lois. La théorie a pu même devancer souvent l'observation et découvrir dans les mouvements célestes des inégalités nouvelles qui ne se manifesteront que dans des temps très-éloignés, et qui n'acquerront que par la durée des siècles tout leur développement.

Pour expliquer le double mouvement de translation et de rotation des planètes, qui nous a paru d'abord si compliqué, il suffit de supposer qu'elles ont reçu à l'origine une impulsion primitive qui ne passait pas par leur centre de gravité (1). Le grand principe de la pesanteur universelle une fois admis, on voit ensuite tous les phénomènes célestes s'en déduire sans peine, et l'astronomie physique n'est plus qu'un vaste problème de mécanique dont le géomètre peut suivre les moindres détails avec le seul secours du calcul, tandis que l'astronomie pratique est incessamment occupée à augmenter la masse des bonnes observations, pour fournir à la théorie les données dont elle a besoin pour l'application de ses formules.

En vertu de leur action mutuelle les uns sur les autres, les planètes doivent s'écarter des orbites elliptiques

(1) D'après les lois de la mécanique, si un corps de figure quelconque reçoit une impulsion qui ne passe pas par son centre de gravité, ce centre sera emporté dans l'espace comme si l'impulsion lui était directement appliquée, et le corps prendra autour de ce point le même mouvement que s'il était immobile. En supposant la terre une sphère homogène, on trouve qu'en vertu du rapport qui existe entre la vitesse angulaire de rotation de cette planète et sa vitesse de révolution autour du soleil, la distance de la direction de l'impulsion primitive à son centre a dû être à très-peu près égale à un 160^e de son rayon.

qu'elles décriraient, si elles n'étaient soumises qu'à l'action du soleil. C'est ce qui arrive en effet, et le mouvement elliptique supposé par Kepler aux planètes n'est qu'approximatif; une observation plus rigoureuse montre que les mouvements des planètes, des comètes et des satellites sont soumis à des perturbations qui ne peuvent être que l'effet de leurs attractions mutuelles. Cependant, comme les actions des planètes les unes sur les autres sont proportionnelles à leurs masses, et que ces masses sont extrêmement petites relativement aux forces principales qui les animent, elles ne peuvent qu'altérer légèrement la forme et la position des orbites sans en changer la nature et sans troubler sensiblement les lois du mouvement elliptique. C'est, en effet, ce que le calcul et l'observation constatent. Il en est de même des satellites; s'ils n'obéissaient qu'à l'action de leurs planètes respectives, ou si l'action du soleil était identiquement la même sur la planète et sur ses satellites, ils suivraient exactement les lois du mouvement elliptique; mais la différence d'attraction du soleil et leurs actions réciproques causent dans leur marche des inégalités qui sont surtout sensibles dans les mouvements des satellites de Jupiter et dans le mouvement de la lune.

Réunies par leurs attractions mutuelles, les molécules dont les corps célestes se composent ont dû former d'abord une masse à peu près sphérique, mais leur mouvement de rotation a bientôt altéré cette figure, et, en vertu de la force centrifuge, il a dû aplatir leurs pôles et élever leur équateur.

La figure des corps célestes n'étant plus sphérique, la résultante de leurs actions mutuelles n'a plus passé exac-

tement par leur centre de gravité (1), et il a dû en résulter des mouvements qui déplacent insensiblement leurs axes de rotation; c'est ce phénomène qui produit la *précession* des équinoxes et la *libration de la lune*.

Enfin, l'action inégale du soleil et de la lune sur les eaux de l'océan doit y faire naître des mouvements d'oscillation analogues à ceux que nous présente le phénomène du flux et du reflux de la mer.

Ainsi donc, après tant de siècles d'erreurs et de tentatives infructueuses, l'observation attentive des phénomènes conduisit Kepler, il n'y a pas deux cents ans, à déterminer les vrais lois des mouvements des corps célestes, et Newton, par une route plus savante, remontant des effets à leur cause, s'éleva jusqu'à la loi aussi simple que générale de tous ces mouvements. Son génie plein de sagacité découvrit à l'instant le lien secret

(1) Newton, en déterminant par l'analyse le mode d'action des sphères, a été conduit aux résultats suivants : 1^o un point situé dans l'intérieur d'une sphère creuse est également attiré de toutes parts, et demeure par conséquent en équilibre en quelque endroit qu'il soit placé, s'il n'est soumis qu'aux attractions des éléments de la sphère, supposées réciproquement proportionnelles au carré des distances. Cette proposition est facile à vérifier. En effet, soit O (fig. 92) le point situé dans l'intérieur de la couche sphérique ABCD, considérons les deux éléments Aa et Bb placés aux extrémités de la droite AOB, soient m et m' leurs masses, r et r' leurs distances au point O, les attractions qu'ils exercent sur ce point seront respectivement exprimées par $\frac{m}{r^2}$ et $\frac{m'}{r'^2}$; or, la couche étant partout de même densité et de même épaisseur, les masses m et m' des deux éléments sont entre elles comme leurs bases ou comme les carrés de leurs rayons Aa et Bb. Mais à cause des triangles semblables AOA et BOB, on a $Aa^2 : Bb^2 :: r^2 : r'^2$; on aura donc $m : m' :: r^2 : r'^2$, et par conséquent $\frac{m}{r^2} = \frac{m'}{r'^2}$. Le résultat serait le même, quelle que fût la position de la droite AOB, en sorte qu'à chaque élément A de la couche répond un élément B qui annule

qui les unit entre eux , et en saisit toutes les conséquences ; mais l'analyse algébrique n'était point alors assez avancée pour donner à de simples inductions tous les caractères d'évidence nécessaires pour frapper les yeux du vulgaire. Newton laissa à ses successeurs le soin d'achever son ouvrage. Un siècle de travaux a suffi à peine pour accomplir cette tâche ; mais à mesure que l'analyse s'est perfectionnée , et que les observations astronomiques ont été plus exactes , les petites différences que pouvaient présenter les résultats de ces deux manières d'arriver à la connaissance des mouvements célestes , ont successivement disparu , et les géomètres ont enfin donné à la loi de la gravitation universelle le plus grand degré de certitude dont les théories humaines soient susceptibles , le parfait accord des conséquences qui s'en déduisent avec les phénomènes observés.

Nous tâcherons d'indiquer dans les chapitres suivants, autant que les bornes de cet ouvrage le permettent , par quelle suite d'heureux efforts ce but a pu enfin être atteint.

son action ; l'attraction de la couche entière est donc nulle , et le point O demeure en équilibre.

2^e L'attraction qu'une couche sphérique homogène , ou composée de couches concentriques dont la densité varie de l'une à l'autre suivant une loi quelconque , exerce sur un point extérieur , est la même que si sa masse entière était réunie à son centre. Cette proposition est encore vraie pour un corps de figure quelconque ; lorsqu'on suppose que la distance du point attiré est extrêmement grande relativement aux dimensions du corps attirant ; elle sera donc d'autant plus exacte relativement à un système de corps dont on considérera les actions réciproques , qu'ils seront plus éloignés entre eux et se rapprocheront davantage de la figure sphérique. Nous verrons que , sous ce double rapport , elle convient parfaitement aux corps planétaires et facilite beaucoup le calcul de leurs attractions.

CHAPITRE III.

DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE DES PLANÈTES, DE LEURS MASSES
ET DE LA PESANTEUR A LEUR SURFACE.

Variations de la force centrale dans les différents points d'une orbite elliptique. — Détermination des masses des planètes qui sont accompagnées de satellites. — Tableau des masses de toutes les planètes, celle du soleil étant prise pour unité. — Densité des planètes. — Intensité de la pesanteur à leur surface.

181. Si les planètes n'obéissaient qu'à l'action du soleil, elles décriraient autour de cet astre des orbites parfaitement elliptiques. Nous avons vu qu'il suffit pour cela que la puissance qui les anime soit une force d'attraction dirigée vers le soleil et croissant en raison inverse du carré des distances, combinée avec la force d'impulsion qui les a mises en mouvement. Suivons les effets que la réunion de ces deux forces doit produire dans les différents points de l'orbite.

Pour qu'un corps sollicité par une force centrale décrive un cercle, il faut, n° 173, 1° que la direction de l'impulsion qui lui est imprimée à l'origine du mouvement soit perpendiculaire au rayon vecteur qui joint ce corps au foyer de la force attractive; 2° que la force centrifuge qui en résulte, et qui a pour mesure *le carré de la vitesse du mobile divisé par le rayon vecteur*, p. 498, soit égale à la force centrale. Si ces deux conditions ne sont pas remplies, l'orbite, quelle que soit sa nature, s'éloi-

gne de la forme circulaire. Cela posé, considérons une planète M en mouvement sur l'ellipse AMBM' (fig. 93).

A l'aphélie B, les directions de la force centrale et du mouvement de la planète, ou de sa force d'impulsion, sont perpendiculaires l'une à l'autre; la courbe décrite serait donc un cercle si la force attractive au point B était égale au carré de la vitesse divisé par le rayon vecteur FB; mais si, comme nous le supposons, elle dépasse cette limite, la planète, en vertu de la supériorité de la force centrale, se rapprochera du foyer F plus qu'elle ne ferait dans le cercle. Il arrivera ainsi que la planète, étant plus voisine du soleil, en éprouvera une plus forte attraction; mais par l'accroissement de cette force, la vitesse de la planète sera nécessairement augmentée. Or, le calcul montre que cette vitesse croît dans un plus grand rapport que la force d'attraction; il y aura donc un point où le carré de la vitesse divisé par le rayon vecteur de la planète atteindra la force centrale qui le surpassait d'abord.

Soit M le point où cette égalité a lieu; si l'angle FMT que forme la direction du mouvement de la planète avec le rayon vecteur FM, était droit, la planète continuerait à se mouvoir sur une circonférence de cercle; mais cet angle est alors d'autant plus aigu que l'excentricité de l'ellipse est plus grande (1); la résultante de la force de projection et de la force centrale se rapproche ainsi du rayon vecteur et tend à le diminuer de plus en plus. La planète continue donc à se rapprocher du soleil; arrivée au périhélie A, elle s'en trouve à sa plus courte distance; la force centrale a acquis alors sa plus grande valeur; et comme sa direction forme un angle droit avec

(1) Voir note 6.

celle de la force de projection, la planète, à partir de ce point, prendrait un mouvement circulaire autour du foyer F, si la force centrale était demeurée égale au carré de la vitesse divisé par le rayon vecteur, comme elle l'était au point M. Mais cette quantité ayant continué à augmenter, à partir de ce point, d'une manière plus rapide que la force centrale, elle la surpasse de beaucoup quand la planète arrive au périhélie A; et la force d'attraction étant ainsi inférieure à ce qu'elle devrait être dans le cercle, la planète s'éloigne du foyer plus qu'elle ne le ferait dans ce cas. La distance de la planète au soleil augmentant, la force attractive et la vitesse diminuent en même temps; mais cette diminution étant plus rapide pour la seconde quantité que pour la première, il se trouve bientôt un point M' où la force centrale est égale au carré de la vitesse divisé par le rayon vecteur; l'orbite deviendrait alors circulaire si la direction du mouvement de la planète et le rayon vecteur FM' étaient perpendiculaires l'une à l'autre; mais l'angle FM'T' étant alors d'autant plus obtus que l'orbite est plus excentrique, la résultante de la force centrale et de la force de projection tend à augmenter le rayon vecteur FM'; la planète continue donc à s'éloigner du soleil, et arrive à l'aphélie B, où elle est à la plus grande distance de cet astre. La force attractive et la vitesse ont alors atteint le *minimum* de leurs valeurs, leurs directions sont perpendiculaires l'une à l'autre; mais la vitesse ayant continué depuis le point M' à diminuer plus rapidement que la force centrale, celle-ci au point B est devenue beaucoup plus grande que le carré de la vitesse divisé par le rayon vecteur FB; elle l'emporte donc sur la force centrifuge qui aurait lieu dans

le cercle, et tend à rapprocher du foyer d'attraction la planète qui recommence par conséquent à décrire l'ellipse AMBM'.

On voit ainsi comment l'attraction du soleil, combinée avec une vitesse d'impulsion quelconque imprimée aux planètes et aux comètes à l'origine des temps, suffit pour expliquer leurs mouvements de translation dans des courbes elliptiques, sans qu'on soit obligé d'admettre que la force qui les anime, les attire vers le soleil dans une partie de l'orbite, et les en écarte dans l'autre, comme le supposaient les premiers adversaires du système de la gravitation, et ce qui serait, en effet, contre toute vraisemblance. L'attraction tend continuellement à rapprocher les planètes du soleil; mais leur vitesse de projection, dirigée selon la tangente à la trajectoire qu'elles décrivent, tend à les en éloigner, et elles reviennent vers cet astre ou s'en écartent tour à tour, selon que l'une des deux forces domine l'autre.

Quant à la nature de l'orbite décrite, l'analyse montre que cette courbe peut être une *ellipse*, une *parabole* ou une *hyperbole*, selon le rapport qui avait lieu entre la vitesse initiale et la distance de la planète au soleil, à l'origine du mouvement. Il peut donc exister dans le système du monde des astres qui ne seront visibles pour nous qu'une seule fois, parce qu'à l'origine de leurs mouvements ils se sont trouvés dans les conditions nécessaires pour décrire ou une parabole ou une hyperbole. Sans doute la plupart des comètes que nous observons sont dans ce cas, et c'est pour cela que le nombre de celles dont nous connaissons le retour périodique est si restreint.

L'analyse fournit des formules au moyen desquelles on

calcule les éléments des orbites des comètes, d'après trois de leurs positions observées pendant la durée de leur apparition. Quant aux éléments des orbites planétaires, nous avons indiqué, dans le chap. VI, 1^{re} partie, les moyens qu'un observateur, dépourvu de tout secours étranger, pourrait suivre pour déterminer leurs premières valeurs approchées ; mais aujourd'hui ces valeurs sont suffisamment connues, et comme les planètes ne sont jamais à d'assez grandes distances de la terre pour échapper aux instruments astronomiques, on a pu répéter les observations autant qu'on l'a jugé convenable, et par des corrections successives on est parvenu à fixer ces éléments avec toute la précision désirable.

Le principe de la gravitation fournit un moyen très-simple de déterminer les masses des planètes qui sont accompagnées de satellites.

Représentons par M et m les masses de deux planètes, accompagnées chacune d'un satellite. Soient R et r les distances des satellites au centre de leurs planètes respectives, T et t les durées de leurs révolutions ; la gravité étant en raison directe des masses et en raison inverse du carré des distances, les forces qui sollicitent chaque satellite vers le centre de sa planète seront respectivement $\frac{M}{R^3}$ et $\frac{m}{r^3}$; mais si l'on suppose que les orbites que décrivent les satellites sont des cercles, les forces centrales qui les animent doivent être égales à leurs forces centrifuges ; ces dernières forces sont entre elles dans le rapport de $\frac{R}{T^3}$ à $\frac{r}{t^3}$, n^o 173 ; on aura donc la proportion :

$$\frac{M}{R^3} : \frac{m}{r^3} :: \frac{R}{T^3} : \frac{r}{t^3}$$

d'où

$$M : m :: \frac{R^3}{T^3} : \frac{r^3}{t^3}.$$

On conclura de cette proportion le rapport de m à M , puisque celui de r à R et de t à T est supposé connu.

On peut déterminer ainsi le rapport de la masse de Jupiter ou de Saturne à celle de la terre. On pourrait aussi évaluer de la même manière le rapport de la masse d'une planète, accompagnée d'un satellite, à celle du soleil; il suffirait de supposer que, dans la proportion précédente, M représente la masse du soleil, m celle de la planète, R sa distance moyenne au soleil, T la durée de sa période, r et t les mêmes quantités relatives au satellite.

Cette méthode suppose que l'on néglige la masse du satellite par rapport à celle de la planète. Mais comme la masse de la lune est trop considérable pour permettre cette hypothèse sans erreur sensible, on a préféré suivre une méthode particulière pour déterminer la masse de la terre. On a comparé pour cela la hauteur dont la terre tombe dans une seconde vers le soleil, en vertu de son mouvement annuel autour de cet astre, à la hauteur dont la pesanteur fait tomber les corps à la surface de la terre dans le même intervalle. En effet, la vitesse de la terre dans son orbite dépend de l'action du soleil; en réduisant l'action de la terre sur les corps placés à sa surface, à la distance moyenne de la terre au soleil, on connaîtra les effets que les attractions de la terre et du soleil produiraient sur des corps placés à la même distance de leurs centres de gravité respectifs; on pourra par conséquent en déduire le rapport de leurs masses, puisque les attractions exercées sont proportionnelles à ces masses,

Quant aux planètes qui n'ont pas de satellites, on ne peut apprécier la grandeur de leurs masses que par les

effets qu'elles produisent. Or, la force attractive qu'exerce une planète donnée sur une autre planète, est proportionnelle à sa masse; on conçoit donc qu'en comparant les perturbations dues à cette action, et que l'observation a indiquées dans les mouvements planétaires, aux formules de la théorie, on en pourra déduire le rapport de la masse de la planète à celle du soleil. Cette manière de déterminer les masses a l'avantage de s'appliquer également à toutes les planètes, et elle serait probablement la plus certaine de toutes celles qu'on peut employer pour les obtenir, si la grandeur des diverses inégalités planétaires nous était suffisamment connue.

Voici, d'après les évaluations les plus récentes, les valeurs des masses des planètes, comparées à celle du soleil, prise pour unité (1). La masse de Jupiter est probablement celle d'entre elles qui est la mieux connue. La masse de Mercure est celle qui laisse le plus à désirer, et l'on n'a pu même l'obtenir jusqu'ici que d'une manière empirique; mais comme cette masse est très-petite, et que les inégalités qui en résultent sont par conséquent très-peu considérables, on voit que l'incertitude qui reste encore à cet égard est sans nulle importance.

Masses des planètes.

Mercure.	$\frac{1}{10493700}$
Vénus.	$\frac{1}{401839}$
La Terre	$\frac{1}{334994}$
Mars.	$\frac{1}{680337}$

(1) Voir la Théorie analytique du système du monde, tome 3^e, p. 341.

Jupiter.	$\frac{1}{1048.69}$
Saturne.	$\frac{1}{3512}$
Uranus.	$\frac{1}{47918}$

On voit que la masse de Jupiter, la plus considérable de toutes les planètes, est moindre que un *millième* de celle du soleil, et les masses réunies des principaux corps du système planétaire, ne formeraient guère que la 800^e partie de cet astre.

Quant aux masses des comètes, elles sont extrêmement petites par rapport à celles des planètes, et paraissent être d'une nature toute différente.

On conçoit d'après cela que l'action mutuelle des planètes les unes sur les autres est très-faible relativement à celle du soleil. Pour que ces actions devinssent comparables, il faudrait que deux planètes approchassent à une extrêmement petite distance l'une de l'autre, ce qui n'arrive pas dans notre système planétaire. L'attraction mutuelle des planètes ne peut donc causer que de légères inégalités dans leurs mouvements respectifs, mais sans en altérer la nature. Les comètes, au contraire, parcourant l'espace dans toutes les directions, peuvent s'approcher assez près des planètes pour que leur action contre-balançant celle du soleil, les lois de leurs mouvements et la nature même de leurs orbites en soient entièrement changées. Ainsi, d'*elliptique* qu'il était, l'orbe d'une comète pourrait devenir *parabolique* ou *hyperbolique*. Nous verrons, en parlant des perturbations des comètes, que le système solaire semble nous avoir déjà présenté un exemple d'un semblable changement.

183 La densité d'un corps dépend de la quantité de par-

ties matérielles qu'il renferme sous un volume donné, c'est proprement le rapport de sa masse à son volume ; si l'on regarde donc les planètes comme des corps à peu près sphériques, ce qui permet de supposer leurs volumes proportionnels aux cubes de leurs rayons, leurs densités seront entre elles comme leurs masses divisées par les cubes de leurs rayons. On pourra donc, lorsqu'on connaîtra par l'observation les diamètres apparents des planètes, déterminer les rapports de leurs densités à celle du soleil.

Ainsi, par exemple, nous avons vu, n° 43, que le demi-diamètre du soleil est 110 fois environ celui de la terre ; il est aisé d'en conclure que la densité moyenne du soleil étant prise pour unité, celle de la terre sera exprimée par la fraction $\frac{(110)^3}{884896}$ ou 3,75 environ, c'est-à-dire que la densité moyenne de la terre surpasse quatre fois à peu près celle du soleil. On a trouvé par une comparaison semblable que la moyenne densité de Jupiter était la même environ que celle de cet astre, et que la densité de Saturne n'en était que la moitié. Les densités des planètes décroissent donc à mesure qu'elles sont plus éloignées du soleil ; cependant cette règle ne paraît pas sans exception, et la densité d'Uranus, par exemple, semble être plus grande que celle de Saturne ; mais il faudra que la masse de cette planète et ses diamètres apparents aient été mieux déterminés pour décider cette question.

184. On peut encore déterminer les intensités de la pesanteur à la surface du soleil et des planètes, lorsque les rapports de leurs masses et de leurs diamètres apparents sont connus. En effet, en regardant le soleil et les pla-

nètes comme des corps sphériques, et en faisant abstraction de leur mouvement de rotation, l'attraction qu'ils exercent sur un point de leur surface, est proportionnelle à leurs masses divisées par les carrés de leurs rayons. On a trouvé ainsi que la pesanteur à la surface du soleil est vingt-neuf fois et demie plus grande que celle qui a lieu sur la terre. Ainsi, le même corps, transporté sur cet astre, y pèserait vingt-neuf fois et demie davantage que sur la terre; il pèserait 2,7 ou trois fois environ son poids à l'équateur de Jupiter, 1,15 sur Mercure, etc. Les vitesses que la pesanteur communique aux corps dans un temps donné, augmentent dans la même proportion: ainsi ils décriraient 145 mètres à peu près à la surface du soleil et 14 mètres à la surface de Jupiter, dans la première seconde de leur chute.

Le principe de la gravitation ne se borne donc pas à nous découvrir les lois des mouvements que nous observons dans les cieux; il nous dévoile des phénomènes que les immenses distances qui nous séparent des corps célestes semblaient interdite à notre intelligence. La mesure de la densité des planètes et du soleil, et celle de l'attraction que ces corps exercent sur les points de leur surface, sont deux exemples très-propres à nous montrer combien les résultats que nous pouvons déduire de la connaissance du principe sur lequel repose la constitution de l'univers, surpassent en étendue ceux que nos faibles moyens d'observation nous permettent d'atteindre.

CHAPITRE IV.

INÉGALITÉS PLANÉTAIRES.

Moyens qu'offre la constitution du système solaire pour simplifier leur recherche. — Inégalités périodiques. — Inégalités séculaires. — Invariabilité des grands axes et des moyens mouvements. — Stabilité du système solaire. — Grande inégalité de Jupiter et de Saturne. — Plan invariable.

185. Nous avons dit que l'observation attentive du mouvement des planètes avait montré qu'elles ne se meuvent pas rigoureusement dans des ellipses, et qu'elles sont soumises à des écarts plus ou moins considérables que nous avons nommés inégalités, et dont la précision des observations oblige à tenir compte lorsqu'on veut déterminer leur véritable position. Nous venons de voir que la loi de la gravitation universelle explique d'une manière très-simple ces perturbations. En effet, l'attraction est une propriété générale qui appartient à tous les corps célestes; l'action réciproque qu'ils exercent les uns sur les autres doit donc altérer les mouvements qu'ils auraient, s'ils n'obéissaient qu'à l'action du soleil. Les orbites des planètes ou des comètes, et celles que les satellites parcourent autour de leurs planètes, ne seront donc pas des ellipses parfaites, comme cela aurait lieu

pour une planète isolée qui circulerait autour du soleil ; les courbes que ces astres décriront seront d'autant plus compliquées, qu'on aura à considérer l'action perturbatrice d'un plus grand nombre de corps, et c'est une question d'analyse qui a longtemps exercé la sagacité des géomètres que celle où l'on se propose de déterminer les courbes que doivent décrire les planètes et les comètes lorsque l'on connaît les causes qui troublent leurs mouvements elliptiques.

Ce problème, dans toute sa généralité, présenterait par sa complication des difficultés insurmontables, et ce n'est qu'en le simplifiant qu'on a pu entreprendre de le résoudre. On a su profiter pour cela des facilités qu'offraient la figure des corps célestes et la disposition des différentes parties du système solaire. Les grandes distances qui séparent les planètes entre elles effacent les causes secondaires qui pourraient contrarier leurs mouvements, pour ne laisser subsister que les effets des forces principales qui les animent ; leur forme presque sphérique et la petitesse de leurs dimensions relativement à leurs distances mutuelles, font que leurs actions sont à très-peu près les mêmes que si leurs masses étaient réunies dans leurs centres de gravité (1). Il en résulte que lorsqu'on n'a égard qu'à leur mouvement de translation, on peut faire abstraction de leur figure, et regarder les planètes et les satellites comme un assemblage de points matériels sur lesquels sont concentrées les masses entières des corps qu'ils représentent.

La faible excentricité des orbites planétaires et la pe-

(1) Voir la note page 523.

titesse de leur inclinaison à l'écliptique facilitent beaucoup la recherche de leurs perturbations ; mais de toutes les circonstances que présente la disposition du système du monde, la plus favorable, sans contredit, à la solution de ce problème est celle qui provient de ce que les forces qui troublent les mouvements elliptiques des planètes, des comètes et des satellites, étant en général très-petites relativement aux forces principales qui les animent, leur action ne fait que causer, dans les mouvements de ces astres, de légères altérations, sans pouvoir changer leur nature. Il en résulte que dans une première approximation on peut négliger tout à fait l'action des forces perturbatrices ; les orbites des planètes, des comètes et des satellites sont alors des ellipses parfaites, et nous avons vu, n° 181, que l'analyse fournissait toutes les données nécessaires pour en déterminer les éléments par l'observation. On considère ensuite, dans une seconde approximation, les termes que les forces perturbatrices introduisent dans les formules, en négligeant tous les termes qui renferment les carrés ou les puissances supérieures de ces forces ; cette seconde expression suffit à la plupart des cas. Si cela est nécessaire, cependant, on peut dans une troisième approximation avoir égard aux carrés et aux produits des forces perturbatrices, et, en continuant ainsi, on parvient, par des approximations successives, à assigner le lieu de la planète avec une exactitude qui peut surpasser celle des observations les plus précises.

Cette manière de procéder à la solution d'un problème par des essais d'une exactitude toujours croissante, lorsque la solution directe surpasserait les forces de l'analyse, est

d'un usage très-commun dans toutes les parties des mathématiques. Elle semble éminemment appropriée à notre faiblesse, qui, en s'élevant par degrés insensibles, ne trouve cependant rien dans la nature qu'elle n'ose aborder.

186. Les inégalités du mouvement elliptique des planètes, résultant de leur action mutuelle les unes sur les autres, se divisent en deux classes distinctes. Les premières, dont l'accroissement est très-lent, ne se rendent sensibles à l'observateur qu'après un espace de temps considérable. On les a nommées par cette raison *inégalités séculaires*; les autres, plus rapides dans leur marche, sont simplement *périodiques*; c'est-à-dire qu'après avoir été en croissant pendant un certain temps, elles vont ensuite en diminuant, et ne produisent sur la position de la planète que des changements alternatifs.

Les inégalités périodiques ne dépendent que des lieux qu'occupent dans l'espace les différents corps du système solaire, et reprennent les mêmes valeurs toutes les fois que ces corps reviennent à la même situation respective. Les variations périodiques affectent donc simplement les positions des planètes dans leurs orbites, tandis que les variations séculaires affectent les éléments mêmes de ces orbites (1). On peut donc regarder les variations périodiques comme de légères corrections à faire à la position

(1) Soit ACB (fig. 94) l'orbite elliptique d'une planète, qui par l'effet des variations séculaires peut, par des nuances insensibles, devenir AC'B, le grand axe AB demeurant invariable. V. n° 187. On se représentera le mouvement vrai de la planète, en imaginant qu'elle se meut autour d'un astre fictif qui décrit la courbe ACB suivant les lois du mouvement elliptique, sur le contour d'une petite orbite *abc* dont la nature dépend des inégalités périodiques dont la planète est affectée.

de la planète calculée sur son orbite elliptique corrigée de ses variations séculaires, et en les introduisant sous cette forme dans les tables, on aura d'une manière très-simple le lieu vrai de la planète.

Les inégalités séculaires affectent, comme nous l'avons vu et d'une manière continue, les dimensions et les positions des orbites, en sorte qu'il pourrait arriver que, dans les siècles futurs, le système planétaire en fût entièrement bouleversé. Comme ces variations sont extrêmement lentes et ne se manifestent qu'après un grand nombre de siècles, l'observation ne pourrait rien apprendre sur la marche de ces inégalités, et la théorie seule peut satisfaire à cette importante question. Les géomètres ont donc dû l'étudier avec une attention spéciale, et ils sont arrivés à des résultats très-satisfaisants, en montrant qu'en vertu de la constitution particulière du système solaire, les inégalités séculaires des éléments qui influent principalement sur la forme et les dimensions des orbites, sont alternatives comme les inégalités périodiques; leur effet seulement est beaucoup plus lent à se manifester, en sorte que la permanence du système entier le maintiendra éternellement par la suite des siècles dans l'état où il est aujourd'hui.

187. La stabilité du système solaire repose sur les deux conditions suivantes : 1° que les valeurs moyennes des grands axes des orbites planétaires demeurent invariablement les mêmes; 2° que les inclinaisons et les excentricités ne soient pas assujetties à des variations qui écartent considérablement ces orbites de la disposition et de la forme qu'elles ont aujourd'hui.

On conçoit, en effet, que si les grands axes étaient

soumis à des inégalités croissant progressivement avec le temps, la figure des orbites pourrait s'altérer considérablement par la suite des siècles, quoique ces changements ne fussent pas sensibles pour nous depuis le peu de temps où les observations ont acquis une précision suffisante. Le grand axe, en croissant ou en diminuant successivement, pourrait changer l'orbite elliptique d'une planète en une parabole, ou la réduire à se précipiter dans le soleil. Une conséquence non moins importante d'une semblable variation, et dont les effets se feraient encore beaucoup plus promptement sentir, serait ceux qui en résulteraient sur les durées des révolutions planétaires. En effet, il est aisé de se convaincre, par la troisième loi de Kepler, qu'une variation proportionnelle au temps, dans l'expression du grand axe, en produit une proportionnelle au carré du temps dans la durée de la révolution de la planète (1). L'accroissement progressif du grand axe sera donc infiniment plus sensible sur le temps périodique de la planète que

(1) Soit T le temps d'une révolution sidérale d'une planète, a le demi-grand axe de son orbite, la distance moyenne de la terre au soleil étant prise pour unité, T' l'année sidérale; on aura $T^2 : T'^2 :: a^3 : 1$, d'où l'on tire $T = a^{\frac{1}{3}} T'$. En supposant donc que l'expression du demi-grand axe contienne une inégalité proportionnelle à T' , il en résultera dans $a^{\frac{1}{3}}$ un terme de la forme AT' , et par suite dans T un terme de la forme $AT'^{\frac{2}{3}}$. En sorte que si la variation du grand axe croît comme le temps, la variation du temps périodique croîtra comme le carré du temps, et par conséquent d'une manière beaucoup plus rapide. Ainsi, par exemple, les variations du grand axe au bout du premier, du second, du troisième siècle, seront représentées par la suite des nombres 1, 2, 3, etc., tandis que les variations de la durée des périodes seront entre elles comme les nombres 1, 4, 9, etc.

sur la figure de son orbite, et il en résultera dans son moyen mouvement des inégalités qui pourront devenir très-considérables lorsqu'on comparera les observations anciennes aux modernes. C'était donc une question fort intéressante à examiner par la théorie que celle de savoir à quel genre d'inégalités l'expression des grands axes des orbes planétaires pouvait être assujettie. Cette recherche a conduit à l'important résultat dont voici l'énoncé : *Les grands axes des orbites et les durées des révolutions ne sont soumis à aucune inégalité séculaire ou susceptible de croître indéfiniment avec le temps.* Ils ne sont assujettis qu'à des inégalités périodiques qui, dépendant uniquement de la configuration du système, reprendront les mêmes valeurs toutes les fois que les corps qui le composent reviendront aux mêmes positions respectives, soit entre eux, soit par rapport à leurs nœuds et à leurs périhélies.

C'est cette propriété très-importante qu'on désigne ordinairement sous le nom de *l'invariabilité des grands axes et des moyens mouvements planétaires* ; on voit qu'elle n'exige pas que les grands axes des orbites soient rigoureusement inaltérables, et les observations faites à diverses époques peuvent indiquer des différences sensibles dans les durées des révolutions et dans la grandeur des grands axes des orbites, mais ces différences seront alternatives, et après avoir été en augmentant pendant un certain temps, les grands axes iront ensuite en diminuant, ce qui assure l'invariabilité de leurs valeurs moyennes.

Les résultats précédents s'appliquent à tous les corps de notre système planétaire ; mais c'est surtout dans la théo-

rie de la terre que leur importance se fait sentir, à cause de l'influence que les inégalités de son moyen mouvement auraient sur la durée de l'année sidérale, élément que les astronomes ont toujours regardé comme invariable, et qui sert de base aux calculs de toutes les tables des mouvements célestes. Il était difficile de constater cette invariabilité par la comparaison des observations, parce que les modernes comprennent un trop court intervalle de temps, et que les anciennes sont trop peu exactes pour en conclure rien de certain sur une donnée aussi délicate; mais la théorie a montré d'une manière incontestable que l'année sidérale n'avait jamais subi aucune altération provenant de cette cause que la suite des siècles ait pu rendre sensible.

188. La stabilité du système du monde est donc parfaitement assurée sur ce point. Considérons maintenant les variations des excentricités et des inclinaisons. Ces deux éléments ne sont plus, comme les grands axes, assujettis à de simples inégalités périodiques; ils sont soumis à des inégalités indépendantes de la situation mutuelle des corps du système, et, par conséquent, la forme des orbites et la position des grands axes peuvent éprouver dans la suite des altérations considérables. Mais, si les excentricités et les inclinaisons étaient susceptibles de croître indéfiniment, les orbites, aujourd'hui presque circulaires, pourraient devenir à la longue très-excentriques, et finir même par changer totalement de nature. De même, les plans de leurs orbites dont les inclinaisons mutuelles sont peu considérables pourraient s'écarter indéfiniment les uns des autres, et le zodiaque devrait être successivement élargi pour renfermer les orbites de toutes les

planètes, ou bien la zone qui le contient, se resserrant de plus en plus, finirait par se réduire à un seul et même plan. Mais le calcul montre que ces changements sont à jamais impossibles; par cela seul que toutes les planètes tournent dans le même sens autour du soleil, les variations séculaires des excentricités et des inclinaisons augmentent et diminuent successivement; en sorte que les orbites planétaires s'approchent ou s'écartent insensiblement de la forme circulaire, et leur inclinaison à l'écliptique augmente ou diminue alternativement; mais ces variations seront toujours comprises entre d'étroites limites qu'elles ne peuvent pas dépasser. Les excentricités et les inclinaisons demeureront donc très-petites dans tous les temps, comme elles le sont aujourd'hui, et les orbites planétaires conserveront la forme à peu près circulaire, et seront toujours renfermées dans une zone étroite de la sphère céleste. Les grands axes demeureront constamment de la même grandeur, et les moyens mouvements uniformes, autant, du moins, que l'on n'a égard qu'aux perturbations qu'ils peuvent éprouver par l'action réciproque des différents corps du système. Il est donc impossible que l'orbite d'une planète ait différé sensiblement de ce qu'elle est aujourd'hui, ni qu'une planète ait été autrefois ou puisse un jour devenir comète; l'écliptique, par la même raison, ne coïncidera jamais avec l'équateur, et les limites des variations de son obliquité ne peuvent excéder *trois* degrés.

189. Ainsi donc, le système solaire ne fait qu'osciller autour d'un état moyen, dont il ne s'écarte jamais que d'une très-petite quantité. Les seuls changements considérables que peuvent éprouver les orbites planétaires

sont relatifs à la position des périhélies et des nœuds. En effet, les variations séculaires des deux éléments qui déterminent ces points ne sont pas limitées comme celles des excentricités et des inclinaisons, et elles peuvent, dans l'intervalle de plusieurs milliers de siècles il est vrai, embrasser la circonférence entière. Ainsi, nous avons vu que le périhélie de l'orbe terrestre a présentement un mouvement direct de $36''{,}44$ par année, et en remontant par le calcul à l'époque où, en vertu de ces variations, le périégée solaire coïncidait avec l'équinoxe du printemps, nous avons trouvé, n° 37, que cette coïncidence avait dû avoir lieu 3976 ans avant le commencement de notre ère, époque qui diffère peu de celle que la plupart des chronologistes assignent au commencement du monde. Cette faculté donnée aux géomètres, de remonter ainsi à tous les états passés et futurs du système solaire, par l'application de la loi de la gravitation universelle, est sans doute l'un de ses plus merveilleux résultats.

Le tableau suivant présente les variations séculaires des éléments elliptiques des planètes principales. On peut par une simple proportion en déduire les variations de chaque élément pour un intervalle de temps quelconque, et à l'aide de la table n° 114, qui donne les valeurs de ces éléments au commencement de ce siècle, ou en conclura leurs valeurs correspondantes à une époque déterminée. Ce tableau est calculé pour 1801, le signe — marque une diminution, ou un mouvement contraire à l'ordre des signes du zodiaque. On voit que les nœuds des orbites ont tous un mouvement rétrograde, tandis que les périhélies, celui de Vénus excepté, ont un mouvement direct.

Variations en 100 années juliennes, ou 36,525 jours.

PLANÈTES.	EXCENTRICITÉS.	LONGITUDE DU PÉRIGÉE.	MOUVEMENT SÉCULAIRE DU NŒUD.	VARIATION SÉCULAIRE DEL'INCLINAISON.
☿	0,000003867	643",56	— 782",27	+ 18",1828
♀	—0,000062711	— 267,60	— 1869,80	— 4,5522
♂	0,000041632	1177,81		
♂	0,000090176	1582,43	— 2328,44	— 0,1523
♃	0,000159350	663,86	— 1577,57	— 22,6087
♄	—0,000312402	1843,07	— 2266,46	— 15,5131
♅	—0,000025072	238,62	— 3597,96	3,1531

190. La propriété qu'ont les grands axes et les moyens mouvements planétaires de demeurer invariables, tandis que les cinq autres éléments de leurs orbites elliptiques changent progressivement avec le temps, constitue un théorème des plus remarquables dans le système du

monde. Ce résultat, parfaitement confirmé par l'analyse, suppose seulement que les moyens mouvements des corps du système ne sont pas entre eux dans un rapport commensurable, ce qui, en effet, n'a pas lieu dans notre système planétaire. Cependant, si le rapport des moyens mouvements de ces planètes, sans être absolument celui de deux nombres entiers, approchait beaucoup de la commensurabilité, il en résulterait, dans les expressions des longitudes de chacune de ces deux planètes, une inégalité qui, croissant avec une grande lenteur, pourrait faire penser que leurs moyens mouvements ne sont pas uniformes, et qu'ils sont affectés d'inégalités du genre de celles que nous avons nommées inégalités séculaires (1). C'est ce qui est arrivé pour Jupiter et Saturne; la comparaison des observations anciennes et modernes avait indiqué clairement que le mouvement du premier de ces astres se ralentit tandis que celui du second s'accélère de siècle en siècle. Pour tenir compte de ce chan-

(1) Les inégalités périodiques sont généralement composées de termes de cette forme $Q \frac{\sin}{\cos} \{ Nt + P \}$; Q est le coefficient de l'inégalité, Nt en est l'argument. L'inégalité change de valeur et même de signes comme le sinus ou le cosinus qui entre dans son expression; elle atteint sa plus grande valeur quand ce sinus ou ce cosinus est égal à l'unité, l'inégalité est alors égale à Q ; elle est nulle quand ce sinus ou ce cosinus se réduit à zéro. La grandeur de l'inégalité dépend de son coefficient Q ; sa période, c'est-à-dire le temps qu'elle emploie à revenir à la même valeur après avoir passé par toutes les valeurs intermédiaires qu'elle est susceptible de prendre, dépend de l'argument Nt . Le coefficient Q est ordinairement de cette forme $\frac{M}{N}$, c'est-à-dire que le coefficient de chaque inégalité a pour diviseur le facteur qui multiplie le temps t sous le signe sinus ou cosinus; quant à la valeur de N , elle a pour expression générale $N = in + i' n' + i'' n'' +$, etc. en désignant par n, n', n'' , etc., les

gement, les astronomes avaient introduit dans les tables de ces deux planètes, deux inégalités, croissantes comme le carré du temps, et dont ils avaient déterminé la grandeur par les observations. La première a été fixée par Halley, à $34'',41$ pour le premier siècle, à partir de 1700, et elle doit s'ajouter au moyen mouvement de Jupiter; la seconde s'élève à $1'23'',41$, et doit être soustraite du moyen mouvement de Saturne. On devait penser naturellement que ces inégalités résultaient de l'action réciproque des deux planètes l'une sur l'autre; mais les géomètres les plus distingués, Euler, d'Alembert, Lagrange, cherchèrent vainement à les rattacher au principe de la gravitation universelle. Ce fut Laplace qui en découvrit le premier la véritable cause dans le rapport très-remarquable qui existe entre les moyens mouvements des deux planètes, et en vertu duquel cinq fois le moyen mouvement de Saturne est à très-peu près égal au double du mouvement moyen de Jupiter.

La théorie indique encore que les deux grandes inéga-

moyens mouvemens des planètes $m, m', m'',$ etc., dont on considère l'action mutuelle, et par $i, i', i'',$ etc., des nombres entiers quelconques; on conçoit donc que si N devient une quantité très-petite par les rapports de commensurabilité qui peuvent exister entre les moyens mouvements des différentes planètes, l'inégalité qui aura cette très-petite quantité pour diviseur pourra devenir considérable. Ainsi, par exemple, le moyen mouvement de Jupiter étant de $109256'',3$, et celui de Saturne de $43996'',7$, dans une année julienne de $365,25$; cinq fois la seconde quantité est à très-peu près égale à deux fois la première. En effet, en nommant respectivement n et n' ces deux quantités on a $5n' - 2n = 1470'',9$ qui n'est presque que la centième partie de n ; les inégalités qui dépendent de l'argument $(5n' - 2n) t$, doivent donc devenir très-sensibles dans les mouvements des deux planètes comme cela a lieu en effet.

lités de Jupiter et Saturne sont liées entre elles par une équation de condition, de sorte que si le mouvement de Jupiter se ralentit par l'action de Saturne, le mouvement de Saturne doit s'accélérer et réciproquement, conformément aux observations; enfin le rapport du retardement de Jupiter à l'accélération de Saturne, est à très-peu près celui que l'observation indique, ce qui prouve que ces inégalités sont bien dues à l'action mutuelle de ces deux planètes l'une sur l'autre. On peut aisément se représenter l'effet contraire produit dans les mouvements de Jupiter et Saturne par leur action réciproque, en supposant qu'en vertu de leurs deux grandes inégalités, leurs orbites respectives oscillent autour d'un état moyen dont elles s'écartent tantôt dans un sens, tantôt dans le sens opposé. Si, par exemple, ABC (*fig. 95*) représente l'orbite moyenne de Jupiter, et que tous ses éléments variant à la fois, cette orbite s'allonge et se renfle de manière à prendre la forme A'C'B', le mouvement de la planète semblera s'être ralenti; si, pendant le même temps, l'orbite de Saturne s'est rétrécie, on remarquera une accélération dans le mouvement de cette dernière planète. Des effets contraires auront lieu lorsque l'allongement ou le rétrécissement des deux ellipses se feront dans le sens inverse.

Ce ralentissement et cette accélération ne se conserveront pas toujours les mêmes, leur grandeur variera comme leur sens dans les siècles futurs. En 1790, les grandes inégalités des deux planètes étaient nulles, elles ont toujours été en croissant depuis cette époque; le mouvement de Jupiter se ralentissant et le mouvement de Saturne s'accéléranr continuellement, elles change-

ront de sens dans 464 ans, ce sera Jupiter qui s'accélé-rera et Saturne qui se ralentira. La période totale de ces deux grandes inégalités est de 929 ans; leur grandeur, dans son *maximum*, est de 20' à peu près pour Jupiter et de 48' pour Saturne, mais elle n'est pas la même à toutes les époques, elle est légèrement altérée par les variations séculaires des éléments des orbites des deux planètes.

191. Le rapport presque commensurable qui existe entre les moyens mouvements de Jupiter et de Saturne, a encore expliqué la cause de plusieurs inégalités très-sensibles que l'observation avait fait remarquer dans leur cours. C'est en examinant de même les relations qui peuvent avoir lieu entre les moyens mouvements des autres planètes, qu'on est parvenu à déterminer par la théorie la valeur exacte de toutes celles de leurs inégalités qui peuvent se manifester par l'observation assidue de leurs mouvements. On conçoit, en effet, que ces inégalités étant très-nombreuses, ce serait un travail absolument impraticable que de les calculer toutes, et d'ailleurs ce serait une opération à peu près inutile pour l'avancement de la science, puisque la plupart de ces inégalités sont tout à fait insensibles. On a donc dû se borner à déterminer celles qui peuvent acquérir des valeurs considérables par quelques circonstances particulières. Or, comme cela n'arrive en général que par les rapports de commensurabilité qui existent entre les moyens mouvements des planètes qui agissent les unes sur les autres, on peut, par une inspection attentive de ces moyens mouvements, reconnaître, *à priori*, celles de ces inégalités qui doivent devenir sensibles, et faciliter, par conséquent, la détermination des inégalités planétaires. Ainsi,

par exemple, dans le mouvement de la terre, on peut se contenter de considérer l'action réciproque de la terre, Vénus et Jupiter, les autres planètes ne causeraient dans son mouvement que des inégalités insensibles. Dans le mouvement de Vénus, on se contentera de considérer l'action réciproque de Vénus, la Terre et Jupiter, etc. C'est de cette manière qu'on a calculé les inégalités de toutes les planètes; elles ont servi à en construire des tables qui ont acquis une précision inespérée; autrefois leurs erreurs s'élevaient à plusieurs minutes, mais depuis la découverte de la loi de la pesanteur universelle, les erreurs se réduisent à un petit nombre de secondes.

Les quatre petites planètes, découvertes au commencement de ce siècle, ne présentent pas les mêmes avantages que les anciennes planètes pour le calcul de leurs perturbations. Leurs excentricités sont considérables et leur inclinaison à l'écliptique peut s'élever jusqu'à $34^{\circ} \frac{1}{2}$. On ne peut donc baser sur la petitesse de ces quantités la convergence des approximations, et il a fallu employer des méthodes particulières pour déterminer les nombreuses perturbations de ces quatre petits astres. Jusqu'ici ces méthodes sont encore très-imparfaites, et l'on n'a pu parvenir à embrasser, comme pour les autres planètes, un nombre indéfini de révolutions; on est réduit à calculer ces perturbations en particulier pour chacune des révolutions successives.

192. Nous ne terminerons pas ce chapitre sans parler d'une importante propriété qui résulte encore de la relation que la gravitation établit entre les variations séculaires de toutes les planètes. On a reconnu que dans le système solaire, au milieu des variations que peuvent éprou-

ver les orbes planétaires, il existe un plan dont la position demeure invariable (1). La propriété qui le caractérise, est que la somme des masses des différents corps du système, multipliées respectivement par les projections sur ce plan des aires que décrivent ces corps dans un temps donné, est plus grande qu'elle ne le serait par rapport à tout autre plan mené par un même point. Cette propriété, traduite en langage algébrique, donne un moyen facile de retrouver ce plan dans tous les temps. Il suffit pour cela que l'on connaisse exactement les masses de toutes les planètes et les éléments de leurs mouvements elliptiques. On pourra donc choisir ce plan pour celui auquel on rapporte la position de tous les corps célestes, et comme sa direction est invariable, en comparant les positions respectives des orbites rapportées à ce plan, à deux époques différentes, on connaîtra les changements qu'elles ont subis dans l'intervalle. Les propriétés du plan invariable sont sous ce rapport précieuses aux astronomes, parce que le plan de l'écliptique auquel ils rapportent ordinairement les mouvements célestes, étant lui-même mobile, il ne peut servir à constater les variations que subissent les positions des orbes planétaires, qu'autant que les variations de l'écliptique sont supposées exactement connues.

Imaginons que, par quelque bouleversement dans l'ordre moral, les observations astronomiques soient in-

(1) Ce plan correspond à celui que nous avons nommé plan *maximum* des aires, dans un système de corps réagissant les uns sur les autres, et qui ne sont soumis à l'action d'aucune force étrangère, c'est une conséquence du principe général de mécanique nommée la *conservation des aires*.

terrompues pendant plusieurs siècles, comme elles l'ont été pendant les désordres du moyen âge, en rapportant au plan invariable les positions des planètes et des satellites, lorsque les sciences commenceront à renaître, on pourra aisément constater les variations que leurs orbites auront subies dans l'intervalle, indépendamment de celles que les étoiles elles-mêmes auraient pu éprouver. Heureusement l'état de la civilisation moderne rend à peu près impossible la réalisation de cette hypothèse, et comme la position de l'écliptique est chaque année très-exactement observée, la considération du plan invariable dans le système planétaire, doit être regardée plutôt comme un résultat remarquable de la théorie qu'utile pour la pratique.

CHAPITRE V.

INÉGALITÉS DU MOUVEMENT DE LA LUNE.

Elles résultent de l'action perturbatrice du soleil. — Mesure de cette force. — Examen des diverses inégalités qu'elle produit. — Variation. — Evection. Equation annuelle. — Mouvement du périée. — Mouvement des nœuds. — Equation séculaire du mouvement moyen, du mouvement du périée, et de celui des nœuds. — Parallaxe du soleil et aplatissement terrestre déduits des inégalités lunaires.

193. Nous avons vu, dans le chapitre V (1^{re} partie), que la lune était, de tous les astres, celui dont le mouvement est sujet à des inégalités plus nombreuses et plus considérables. Aussi, la théorie de la lune a-t-elle en tout temps vivement préoccupé les astronomes et les géomètres, autant peut-être à raison de ses difficultés même, que de ses nombreuses et importantes applications. Les nations maritimes surtout, frappées de son utilité pour l'avancement de la géographie et de la navigation, ont fait de nobles efforts pour hâter ses progrès, et les prix proposés par le gouvernement anglais ont produit les premières tables de la lune assez précises pour être d'un usage avantageux dans la pratique de l'art nautique. Quelques-unes de ses inégalités, et les plus considérables, ont d'abord été déterminées par les observateurs, qui se sont

constamment occupés de cet astre depuis les anciens Chaldéens jusqu'à nos jours ; mais il y avait loin de là à une connaissance exacte de tous les mouvements de la lune , et ce n'est qu'après que la découverte de la gravitation universelle eut permis aux astronomes de distinguer les divers arguments des inégalités lunaires , dont ils ont ensuite déterminé les coefficients par l'observation , que les tables de la lune ont pu faire de rapides progrès , et arriver au degré de perfection qu'elles ont atteint aujourd'hui.

Si la lune n'obéissait qu'à l'action de la terre , elle décrirait , en vertu des lois générales de la gravitation , une ellipse dont le centre de la terre occuperait un des foyers ; et d'après les formules connues du mouvement elliptique , il nous serait facile d'assigner à chaque instant sa position sur son orbite. Mais les nombreux écarts auxquels ce mouvement est sujet , nous indiquent l'existence de forces perturbatrices qui détournent continuellement la lune de la route qu'elle suivrait si elle n'était soumise qu'à la pesanteur terrestre , et dont il faut d'abord rechercher la cause. Or , en examinant quels sont les astres , dans notre système planétaire , qui agissent sur la lune , on reconnaît que le soleil peut seul avoir sur ses mouvements une influence sensible , et c'est , par cette raison , que l'on a donné à la question qui a pour objet de déterminer le mouvement troublé de la lune autour de la terre , d'après la théorie de la gravitation , le nom de *des trois corps*.

194. Si le soleil était à une distance assez grande pour que les actions qu'il exerce sur la terre et la lune , pussent être considérées comme égales et dirigées suivant des droites

parallèles, elles ne troubleraient pas le mouvement relatif de ces deux astres, et elles n'auraient sur leurs mouvements absolus qu'une influence qui leur serait commune. C'est donc de la différence des actions que le soleil exerce sur la terre et sur la lune, que résultent les inégalités dont cet astre est affecté. La grandeur de ces altérations doit dépendre des intensités relatives de la force perturbatrice et de la force principale, ou du rapport des actions du soleil et de la terre sur la lune. La masse du soleil est au moins 350,000 fois plus considérable que celle de la terre, mais sa distance à la lune est 400 fois plus grande que celle de la terre au même astre; d'ailleurs, c'est seulement de la différence des actions que le soleil exerce sur la lune et sur la terre que résultent les perturbations du mouvement lunaire. On s'assure aisément que cette différence est proportionnelle à la masse du soleil, divisée par le cube de la distance du soleil à la lune (1); représentons par AL (fig. 96) l'action du soleil ainsi réduite, lorsque la lune est au point L de l'orbite qu'elle décrit autour de la terre T, décomposons cette force en deux autres, l'une BL, di-

(1) Désignons par M la masse du soleil, par s et l ses distances respectives à la terre et à la lune; $\frac{M}{s^2}$ et $\frac{M}{l^2}$ seront les actions qu'il exerce sur chacun de ces deux corps; nommons r la distance de la lune à la terre, et supposons pour plus de simplicité la lune en conjonction avec le soleil, on aura $l = s - r$ et par conséquent $\frac{M}{l^2} = \frac{M}{(s-r)^2} = \frac{M}{s^2} (1 + \frac{2r}{s} + \text{etc.})$; on aura donc, pour la différence des actions que le soleil exerce sur la terre et la lune, $\frac{M}{s^2} - \frac{M}{l^2} = -\frac{2Mr}{s^3}$; en négligeant les termes divisés par s^4 et par les puissances supérieures de s , termes qui sont nécessairement très-petits, à cause de la grande distance de la terre au soleil relativement à celle de la lune à la terre.

rigée suivant le rayon TL , l'autre Lc , perpendiculaire à ce rayon. La grandeur respective de ces deux composantes est déterminée par le parallélogramme $abLc$, et l'on voit, d'après la figure, que l'une aura pour effet de diminuer la pesanteur de la lune vers la terre, et l'autre, d'augmenter sa vitesse dans son orbite. Par les expressions analytiques de ces forces, on trouve que le rapport de la valeur moyenne de la première force, c'est-à-dire de la diminution de la pesanteur de la lune, provenant de l'action du soleil, à la pesanteur totale résultant de l'action de la terre, est à très-peu près égale au double du carré du rapport des révolutions de la lune et du soleil autour de la terre. Or, le mouvement de la lune étant 13 fois environ plus rapide que celui du soleil, le rapport précédent est de $\frac{1}{13}$ à peu près, et l'on en conclut que, la force centrale qui retient la lune dans son orbite, est environ 358 fois plus grande que la force perturbatrice qui tend à l'en écarter.

Cette force change d'intensité et de direction dans les différents points de l'orbite lunaire, elle est tantôt plus forte, tantôt plus faible que sa valeur moyenne; la lune est tantôt plus approchée, tantôt plus éloignée du soleil que la terre, et en la suivant pendant l'une de ses révolutions, on s'assure aisément que sa pesanteur sur la terre est tantôt augmentée et tantôt diminuée par l'action du soleil, selon les positions respectives des trois astres. L'action du soleil augmente la pesanteur de la lune dans les quadratures, c'est-à-dire lorsque la distance angulaire des deux astres est de 90° ; elle la diminue dans les syzygies, c'est-à-dire lorsqu'ils se trouvent sur le même rayon visuel mené de la terre; mais l'accroissement dans les

premiers points n'est que la moitié de la diminution qui a lieu dans les seconds. Elle se réduit à zéro dans les quatre positions où la lune se trouve à $40^{\circ} 44'$ des syzygies, ou à $35^{\circ} 16'$ des quadratures. C'est-à-dire que, dans ces quatre points, situés à angles droits sur l'orbite, la pesanteur de la lune n'éprouve aucune altération par l'action du soleil.

La force LC, perpendiculaire au rayon vecteur LT, et qui tend à accroître la vitesse de la lune, est triple dans les *octants* ou dans les points où la lune se trouve à 45° du soleil, de la force moyenne provenant de l'action du soleil, et qui tend à diminuer la pesanteur. Nous avons vu que cette force était $\frac{1}{354}$, à peu près de la force centrale provenant de l'action de la terre; l'action du soleil qui tend à faire varier la vitesse de la lune, est donc la 119^e partie environ de la même force.

195. Ainsi donc, quoique le soleil soit incomparablement plus grand que la terre, sa distance à la lune étant beaucoup plus considérable que celle de la terre au même astre, la force perturbatrice, qui provient de son action sur la lune, est très-petite, relativement aux forces principales qui l'animent. Elle introduit donc simplement dans le mouvement elliptique de la lune autour de la terre, des inégalités du même genre que celles qui résultent dans le mouvement elliptique des planètes autour du soleil, de leurs actions mutuelles; seulement, comme la force perturbatrice est, dans le cas de la lune, beaucoup plus grande, et le mouvement de l'astre troublé beaucoup plus rapide, les coefficients des diverses inégalités seront en général plus considérables, et leurs périodes beaucoup plus courtes.

Ces inégalités pourront se partager comme les précédentes, en deux classes distinctes ; les *inégalités périodiques*, c'est-à-dire celles dont l'étendue est limitée, et qui, dans un espace de temps assez court, reprennent successivement les mêmes valeurs ; et les *inégalités séculaires* ou simplement *progressives*, c'est-à-dire celles qui croissent indéfiniment avec le temps, et qui sont indépendantes des positions respectives de l'astre troublé et de l'astre perturbateur. Les premières font varier la position de la lune sur son orbite elliptique, les secondes altèrent insensiblement les éléments de cette orbite, et changent rapidement la position de ses nœuds et de son périhélie. On peut donc, conformément à ce qui a été dit n° 186, se représenter aisément le mouvement troublé de la lune, en supposant que son lieu moyen se meut, suivant les lois du mouvement elliptique, sur une ellipse dont les éléments sont variables, les nœuds et le périhélie mobiles, et que la lune décrit autour de ce point une courbe qui dépend des inégalités périodiques dont son mouvement est affecté. De cette manière, le mouvement vrai de la lune autour de la terre paraît s'effectuer sur une suite d'épicycles, et c'est, en effet, ainsi que les anciens astronomes, jusqu'à Tycho-Brahé, l'avaient représenté.

196. Nous avons dit que l'action du soleil augmente et diminue alternativement la vitesse de la lune, selon sa position par rapport aux syzygies, c'est-à-dire à la ligne qui joint les centres du soleil, de la lune et de la terre lorsque ces astres sont en conjonction ou en opposition. Il en résulte des altérations périodiques dans le mouvement elliptique de la lune ; tantôt elle est en avant, tan-

tôt elle demeure en arrière de la position qu'elle aurait sur son orbite par le seul effet de l'attraction de la terre. Ces inégalités, qui dépendent de la position respective du soleil et de la lune, vus de la terre, ont reçu le nom de *variation* dans la théorie lunaire. La plus considérable d'entre elles est celle qui a pour argument le double de la distance angulaire de la lune au soleil, sa période est donc moitié de la durée d'un mois synodique. Cette inégalité, tantôt additive et tantôt soustractive, augmente et diminue alternativement l'équation du centre; elle est nulle dans les syzygies et les quadratures, et elle atteint sa plus grande valeur dans les octants lorsque la lune est à 45° des syzygies, elle peut s'élever alors à $39' 30''$, n° 51.

La partie de la force perturbatrice du soleil qui fait varier la pesanteur de la lune vers la terre, produit l'*évection*, la plus considérable des inégalités lunaires et la plus anciennement connue. Elle fut découverte par Ptolémée; avant lui Hipparque avait déjà reconnu l'excentricité de l'orbite et l'équation du centre qui en résulte; il avait montré par là pourquoi la vitesse de la lune n'est pas toujours la même, et pourquoi elle atteint son *maximum* et son *minimum* aux extrémités de la ligne des apsides. Ptolémée remarqua que les quantités absolues de ces vitesses extrêmes varient d'une révolution à l'autre, et que plus le soleil s'éloigne de la ligne des apsides, plus la différence de ces vitesses devient considérable. Cette inégalité peut s'expliquer par une contraction ou une dilatation de l'excentricité de l'orbe de la lune résultant des variations de sa pesanteur causées par l'action du soleil. En effet, supposons (*fig. 97*) la terre en T, au foyer de l'ellipse ABCD que décrit la lune; si au moment où

cet astre arrive à l'apogée en A, le soleil se trouve en S, en sorte que la ligne des apsides coïncide avec la ligne des syzygies, la lune se trouvera en même temps dans sa plus grande distance à la terre et dans sa plus courte distance au soleil. La diminution de l'intensité de la pesanteur, produite par l'action de cet astre, est donc d'autant plus sensible que l'attraction du soleil est alors la plus forte qu'elle puisse être, tandis que l'attraction de la terre est réduite au *minimum* de sa valeur. Au contraire, lorsque la lune se trouve au point opposé en B', la force centrale résultant de l'action de la terre, a atteint sa plus grande valeur, et la diminution qu'elle éprouve par l'action du soleil est la plus petite possible. Il suit de là que la différence des deux distances TA et TB', ou l'excentricité qui en est la moitié, doit paraitre plus considérable lorsque la ligne des apsides est située dans la position que nous lui avons supposée, que lorsqu'elle coïncide avec la ligne des quadratures. Cette variation de l'excentricité de l'orbite de la lune, en produit une correspondante dans sa vitesse, et il en résulte une inégalité très-sensible dans son mouvement en longitude. Cette inégalité augmente continuellement l'équation du centre dans les quadratures et la diminue dans les syzygies. Elle a pour argument le double de la distance de la lune au soleil, moins la distance de la lune à son périégée. Sa plus grande valeur est de $1^{\circ} 16' 29''$. Elle a été reconnue, comme nous l'avons dit, par les anciens astronomes, mais ce sont les astronomes modernes qui lui ont donné le nom d'*évection* sous lequel elle est généralement désignée.

L'orbite du soleil n'étant point circulaire, sa distance

à la lune est tantôt plus grande et tantôt plus petite que sa distance moyenne. Quand le soleil est en hiver dans sa plus grande proximité de la terre ou dans son périégée, son action, devenue plus puissante, retarde le mouvement de la lune, et ce mouvement s'accélère à mesure que le soleil avance du périégée vers l'apogée. L'ellipse lunaire semble se dilater ou se contracter tour à tour, selon qu'elle est plus ou moins échauffée par les rayons solaires, et l'astre, par conséquent, doit mettre un temps plus ou moins long à la parcourir. De là résulte dans l'expression de la longitude de la lune une inégalité qui dépend de la distance du soleil au périégée ou de son *anomalie moyenne*. Cette inégalité a, comme on voit, le même argument que l'équation du centre du soleil, mais elle est affectée de signe contraire, en sorte qu'elle ralentit le mouvement lunaire quand celui du soleil augmente, et réciproquement elle l'accélère quand elle diminue le mouvement du soleil. Cette inégalité reprend les mêmes valeurs lorsque le soleil revient à la même position dans l'écliptique; sa période est donc celle d'une année *anomalistique*, et on l'a nommée par cette raison *équation annuelle*. Elle s'élève à 11' 13" dans son *maximum*.

Ainsi donc, la partie LC (fig. 96) de la force perturbatrice du soleil, en ralentissant et accélérant tour à tour la vitesse de la lune, produit la *variation*, et l'autre partie LB de la même force, en faisant varier la pesanteur de la lune vers la terre, donne naissance à l'*éviction* et à l'*équation annuelle*. On peut encore attribuer à la même cause le mouvement très-sensible que l'observation indique dans l'*axe des apsides*. En effet, la lune atteint son périégée au moment où sa vitesse acquise est à son

maximum, et où elle a, par conséquent, le plus de force pour contre-balancer l'attraction de la terre, n° 181; l'action du soleil, en altérant la pesanteur de la lune vers la terre, doit donc faire varier ce point et la position du périégée. Mais le mouvement qui en résulte est nécessairement alternatif. En effet, l'attraction du soleil, comme nous l'avons vu, diminue la pesanteur de la lune vers la terre dans les syzygies, tandis qu'elle l'augmente dans les quadratures; la ligne des apsides a donc, dans ces deux points, un mouvement dirigé en sens inverse: dans le premier cas, ce mouvement tend à rapprocher le périégée lunaire du soleil, et il est direct; dans le second, il tend à l'en écarter, et il est rétrograde. Mais comme la diminution de la force centrale dans les syzygies est double de son augmentation dans les quadratures (1), il en résulte que la quantité dont le périégée s'est avancé dans l'ordre des signes surpasse celle dont il a rétrogradé; l'excès du premier mouvement sur le second constitue le déplacement annuel du périégée. Ce mouvement, rapporté à l'équinoxe, est, selon l'observation, de $40^{\circ} 39' 45''$ en 365 jours moyens solaires, n° 51, ce qui produit une révolution sidérale en 3232,5756 jours et une révolution tropique en 3231,475 jours, ou neuf ans à peu près. Clairaut essaya le premier de déterminer ce mouvement par la théorie, et ses premiers calculs ne lui ayant donné que la moitié de sa valeur, il en avait conclu que sur ce point la loi de l'attraction en raison inverse du carré des distances était en défaut; mais ayant eu égard au carré de la force perturbatrice qu'il avait négligé d'abord, il retrouva la seconde moitié du mouvement du périégée qui

(1) Voir les notes.

avait échappé à sa première approximation , et reconnu avec satisfaction que toutes les inégalités du mouvement lunaire, comme celles des autres mouvements célestes, pouvaient s'expliquer sans qu'on fût obligé d'altérer en aucune manière l'admirable simplicité de la loi de la gravitation.

Les trois équations dont nous venons de reconnaître la cause s'ajoutent à l'équation du centre dans l'expression de la longitude vraie de la lune ; l'attraction du soleil produit encore dans son mouvement elliptique diverses autres inégalités périodiques, mais moins importantes, et que nous désignerons sous la qualification générale de *perturbations*. On aura ainsi :

Long. vraie = long. moy. + équat. du cent. + évection + variation + équat. annuel. + perturbations.

197. Considérons maintenant les inégalités de la latitude. La lune ne se meut pas dans le plan de l'écliptique comme nous l'avons supposé jusqu'ici ; son orbite est inclinée de 5° environ sur ce plan : il en résulte que l'action perturbatrice du soleil s'exerce généralement suivant une droite oblique à l'écliptique. Du centre de la lune abaissons une perpendiculaire sur ce plan , et par cette perpendiculaire et la direction de la force perturbatrice, concevons un plan qui coupera l'orbe lunaire suivant une droite quelconque. On pourra décomposer la force perturbatrice en deux autres forces , l'une dirigée suivant cette dernière droite, l'autre suivant la perpendiculaire à l'écliptique. La première force agissant dans l'orbite même de la lune est celle qui, en altérant sa vitesse et sa pesanteur, produit les inégalités de la longitude dont nous venons de parler ; la seconde tend continuellement

à rapprocher la lune du plan de l'écliptique ; elle est nulle dans les quadratures et dans les nœuds , parce que l'action du soleil est alors dirigée parallèlement au plan de l'écliptique ou dans ce plan même ; dans les points intermédiaires , elle produit sur la position de l'orbite lunaire des effets très-sensibles.

Soit EE' l'écliptique (*fig.* 98), LNL' l'orbite de la lune et Lb le petit arc qu'elle décrirait dans un instant pour se rapprocher de son nœud descendant N , sans l'action du soleil ; soit La l'espace que cette force perturbatrice tend à lui faire parcourir dans le même intervalle en la ramenant vers l'écliptique. La lune , en vertu des deux forces qui la sollicitent , décrira la diagonale Ll du parallélogramme $Llab$; l'orbite lunaire de LNL' se change donc en $LN'L'$, et le nœud qui était en N se trouve transporté en N' . NN' est la projection d'un petit arc de l'écliptique qui représente le mouvement du nœud N , dans l'intervalle que la lune met à passer de L en l , et l'on voit que ce mouvement est dirigé de l'est à l'ouest, c'est-à-dire en sens contraire du mouvement de la lune en longitude ; mais on observera qu'en même temps l'inclinaison LNE de l'orbite lunaire à l'écliptique est devenue $LN'E$, et comme ce second angle est plus grand que le premier , l'inclinaison va en croissant tant que la lune est au-dessus de l'écliptique. Quand la lune passe au-dessous de ce plan, par exemple en L' , il est aisé de voir par l'inspection de la figure que l'action du soleil , dirigée suivant $L'c$, changeant l'orbite de $LN'L'$ en $L'N''L''$, l'inclinaison diminue, tandis que le nœud au contraire conserve toujours un mouvement rétrograde.

Ainsi donc l'action perturbatrice du soleil cause dans le plan de l'orbite lunaire une espèce de balancement autour de la ligne des nœuds ; mais l'accroissement d'inclinaison qu'il éprouve lorsque la lune est au-dessus de l'écliptique compensant la diminution qui a lieu quand elle se trouve au-dessous du même plan, l'inclinaison moyenne demeure la même dans tous les siècles ; la même force, en amenant la lune à traverser l'écliptique plutôt qu'elle ne le ferait sans cette action, change la direction de la ligne des nœuds, et leur fait parcourir d'un mouvement rétrograde $19^{\circ} 19' 42''$, 32 en 365 jours moyens solaires, ce qui produit une révolution tropique en 6798,281 jours, et une révolution sidérale en 6793,391 jours, c'est-à-dire en 18 ans et 7 mois environ. La rapidité des mouvements du périée et des nœuds de l'orbite lunaire forme l'un des points les plus remarquables de la théorie de notre satellite, et ce qui la distingue essentiellement de la théorie des planètes, où les déplacements des mêmes points s'effectuent avec une lenteur séculaire.

Les mêmes causes qui altèrent l'inclinaison et la position des nœuds de l'orbite lunaire produisent des variations périodiques dans l'expression de la latitude qui résulte de ce que la lune n'est pas en mouvement dans le plan même de l'écliptique. Les inégalités de la latitude sont en général beaucoup moins considérables que celles de la longitude ; la plus forte s'élève à $8' 47''$ dans son *maximum*, elle a été d'abord reconnue par l'observation, et c'est à Tycho qu'on en doit la découverte. Les autres ont été indiquées par la théorie aux astronomes, qui ont ensuite déterminé leurs valeurs par l'observation ; elles sont beaucoup plus faibles que la précédente, et la plus considérable ne dépasse pas $25''$.

L'attraction de la terre produit encore dans l'orbite de la lune un mouvement d'oscillation semblable à celui que l'attraction de la lune produit sur l'équateur terrestre, et d'où résulte le phénomène de la *nutaton*, comme on le verra chap. XI. Ce mouvement est ce qu'on nomme par analogie la *nutaton* de la lune. Son étendue dépend de l'aplatissement de la terre et peut servir à le déterminer.

198. Les principales inégalités périodiques du mouvement lunaire avaient été découvertes et déterminées par l'observation longtemps avant que la loi de la gravitation ne nous en eût expliqué les causes; mais la théorie pouvait seule nous donner le moyen de reconnaître la marche des inégalités de la seconde espèce, ou des inégalités séculaires, à cause de l'extrême lenteur avec laquelle leurs variations s'effectuent. La plus remarquable est celle qui affecte le moyen mouvement de la lune. En comparant entre elles des observations faites à de grands intervalles, on avait remarqué que les observations donnaient à la lune une position moins avancée dans son orbite qu'elle ne devrait l'être lorsqu'on la calcule au moyen des tables astronomiques; et comme les différences sont trop considérables pour être attribuées aux erreurs des tables ou à l'incertitude des observations, on a dû en conclure que le mouvement de la lune déterminé par les observations actuelles est plus rapide qu'il n'était autrefois: d'où il résulte qu'en appliquant ce mouvement à des époques antérieures, nous reculons la lune dans son orbite plus qu'elle ne devrait l'être pour correspondre exactement aux observations. Cette accélération du moyen mouvement est surtout sensible lorsqu'on compare successivement les positions de la lune

calculées par les tables modernes, avec les observations de Ptolémée, et les observations faites à des époques plus récentes. On reconnaît alors que les différences sont d'autant moindres que les observations sont plus rapprochées de nous ; elles ne sont pas proportionnelles aux intervalles écoulés, et l'accélération qui en résulte dans le moyen mouvement croît à très-peu près comme le carré des temps. Ainsi, en la supposant de $10'',7232$ dans le premier siècle, elle sera de $42'',8982$ à la fin du second, et ainsi de suite, c'est-à-dire qu'on aura l'accélération du moyen mouvement de la lune à une époque quelconque, en multipliant $10'',7232$ par le carré du nombre de siècles écoulés depuis l'époque d'où l'on compte le temps, et l'on déterminera la position de la lune à un instant quelconque, en ajoutant cette accélération à son mouvement séculaire.

Cette accélération est ce qu'on nomme *l'équation séculaire de la lune* ; elle a toujours été progressive depuis les plus anciennes observations qui nous soient parvenues jusqu'à l'époque actuelle ; mais la théorie montre que cette inégalité est périodique comme toutes celles qui affectent les mouvements planétaires ; sa période seulement est extrêmement longue, elle embrasse des millions d'années, et l'intervalle qui nous sépare des plus anciennes observations n'en a développé encore qu'une très-faible partie.

Les géomètres ont longtemps vainement cherché à reconnaître la cause cachée de cette inégalité ; c'est Laplace qui eut enfin le bonheur de la trouver, et cette découverte doit être mise au rang de ses plus beaux travaux. Il fit voir que l'équation séculaire de la lune est

due à l'action du soleil sur notre satellite, combinée avec la variation séculaire de l'excentricité, de l'orbe terrestre. Cette variation est peu sensible dans le mouvement de la terre ; mais *réfléchie*, pour ainsi dire, par le soleil, selon l'expression de Laplace, elle devient très-sensible dans le mouvement de la lune. L'équation séculaire de la lune va en augmentant quand l'excentricité de l'orbite terrestre diminue, comme cela a eu lieu depuis les anciennes observations jusqu'à nous, mais elle deviendra négative quand l'excentricité parvenue à son *minimum*, cessera de diminuer pour commencer à croître. L'accélération du mouvement lunaire se changera alors en un retardement ; mais un grand nombre de siècles s'écoulera avant cette époque, et l'inégalité qui en résultera dans le mouvement séculaire de la lune pourra s'élever jusqu'à 8 ou 9° avant qu'elle ne change de signe.

199. Laplace a encore reconnu, dans les éléments qui déterminent la position du périée et des nœuds de l'orbe lunaire, des inégalités séculaires qui dépendent de la même cause que celle de la longitude moyenne, c'est-à-dire de la variation de l'excentricité de l'orbite terrestre. Il en résulte que les mouvements de ces deux points ne sont pas rigoureusement uniformes ; ils changent insensiblement de grandeur dans les différents siècles ; le mouvement du périée et des nœuds se ralentit quand le mouvement moyen s'accélère, et réciproquement (1). L'inégalité du mouvement du périée est quadruple de celle du moyen mouvement et affectée d'un signe contraire ;

(1) Les équations séculaires du moyen mouvement, des mouve-

celle de la longitude du nœud est égale à six dixièmes de cette même inégalité, ou plus exactement les équations séculaires de ces trois mouvements sont comme les nombres 1, —3,70197 et —0,61206.

Ces inégalités sont trop petites pour qu'elles eussent pu se manifester par l'observation directe, parce qu'elles seraient longtemps restées confondues dans les erreurs dont les observations sont susceptibles; mais lorsque la théorie les eut découvertes et qu'on les eut fait entrer dans le calcul, elles se sont vérifiées d'une manière admirable par l'accord des phénomènes. Ainsi, des éclipses Chaldéennes ont été représentées avec une grande exactitude en tenant compte des trois inégalités séculaires; tandis que si l'on n'y avait point eu égard, les différences se seraient élevées à plusieurs degrés. (*Connaissance des Temps*, 1801).

La théorie indique encore, dans l'excentricité et dans l'inclinaison de l'orbite lunaire, des inégalités séculaires dépendantes de la même cause que les précédentes; mais elles seront toujours trop peu considérables pour qu'elles puissent devenir sensibles par les observations.

La position de l'écliptique étant variable, il semble qu'il en doit résulter, dans l'inclinaison de l'orbite lunaire sur ce plan, des inégalités semblables à celles que les variations de l'excentricité de l'orbite terrestre introduisent dans la longitude; mais la théorie montre que

ments du périée et des nœuds sont respectivement, selon M. Damoiseau :

$$\text{Moyen mouv.} = 10'', 7232 i^3 + 0'', 019361 i^3,$$

$$\text{Mouv. du périée} = -39'', 6971 i^2 - 0'', 071674 i^3,$$

$$\text{Mouv. du nœud} = -6'', 5632 i^2 - 0'', 011850 i^3,$$

i étant le nombre de siècles écoulés depuis 1801.

l'attraction du soleil ramène l'orbite lunaire constamment à la même inclinaison sur l'écliptique, en sorte que les latitudes restent les mêmes que si ce plan était invariable. Cette constance dans l'inclinaison moyenne de l'orbite lunaire à l'écliptique est confirmée par toutes les observations, et cette orbite n'éprouvera que des altérations qui seront toujours insensibles.

200. La théorie indique encore, dans le mouvement de la lune, un grand nombre d'autres inégalités dont les arguments dépendent, soit du mouvement de la lune et du soleil dans leurs orbites respectives, soit simplement des changements progressifs du périée et du nœud de l'orbite lunaire. Comme ces dernières inégalités croissent beaucoup moins rapidement que les premières, à raison de la lenteur des mouvements de ces deux points comparés aux mouvements du soleil et de la lune, on les a nommées, pour les distinguer, *inégalités à longues périodes*. Elles forment, dans la théorie de la lune, une classe à part; leur détermination présente de grandes difficultés, mais elles ont donné l'explication de quelques anomalies singulières que l'observation avait indiquées dans le mouvement lunaire, sans qu'on en pût découvrir la cause. C'est ainsi qu'une petite inégalité à longue période, dépendante de la longitude du nœud de la lune, d'abord signalée par Mayer et Masson, avait été rejetée par les géomètres, comme ne se rattachant pas à la théorie de la pesanteur, lorsque Laplace reconnut qu'elle résultait de la non-sphéricité de la terre, et qu'elle pouvait, par conséquent, donner la mesure de son aplatissement. En effet, l'on conçoit que si l'on calcule par la théorie le coefficient de cette inéga-

lité, en laissant comme arbitraire dans cette détermination l'aplatissement du sphéroïde terrestre, qu'on compare ensuite le résultat de ce calcul au coefficient donné par l'observation, on en pourra conclure la valeur de la quantité indéterminée. Burg et Burckart, par un grand nombre d'observations, ont fixé cette inégalité à $20''{,}987$, ce qui donne, pour l'aplatissement du sphéroïde terrestre, la fraction $\frac{1}{305}$, valeur qui s'accorde aussi bien qu'on peut le désirer avec celle qui résulte des mesures directes prises à la surface de la terre, et qui a l'avantage d'être moins affectée que celles-ci des irrégularités de sa figure. Ainsi donc, la lune, dont les éclipses avaient fait connaître aux premiers astronomes la sphéricité de la terre (p. 184), leur a servi, quand la science a été plus avancée, à déterminer avec exactitude sa figure, et à mesurer son aplatissement.

201. Nous avons vu, n° 179, qu'en supposant que la force qui retient la lune dans son orbite soit la pesanteur terrestre, diminuée en raison inverse du carré de la distance de la terre à cet astre, la hauteur dont la lune descend, suivant la verticale, dans *une seconde*, est exactement celle dont un corps pesant, placé à la distance de la lune, s'avancerait vers la terre dans le même intervalle. Or, cette hauteur est connue par l'observation, puisque c'est le *sinus versé* de l'arc que notre satellite décrit dans une seconde de temps (n° cité); nous connaissons, par les expériences du pendule, la hauteur dont un corps grave à la surface de la terre tomberait dans le même intervalle; en égalant ces deux expressions, nous en pourrions donc conclure la distance de la lune à la terre en fonction du rayon terrestre, c'est-à-

dire la parallaxe de cet astre, ou bien, en supposant cette parallaxe connue par les observations, nous en pourrions conclure la grandeur du rayon terrestre. On retrouve par ce calcul, pour la parallaxe lunaire, une valeur à très-peu près égale à celle que nous avons déduite des observations directes, n° 50.

Il existe dans l'expression de la longitude de la lune une inégalité qui dépend du rapport des distances de la lune et du soleil à la terre; et comme la distance de la lune est connue, on en peut conclure la distance du soleil à la terre ou l'expression de sa parallaxe. Cette inégalité, par cette raison, a reçu le nom d'*inégalité parallactique*. Elle a pour argument la distance de la lune au soleil, et l'observation a donné à Burg 122'',38 pour son coefficient. Cette valeur, comparée à celle qui résulte de la théorie, donne 8'',5605 pour la parallaxe du soleil, ce qui diffère peu de 8'',5776, valeur de cette parallaxe que l'on a conclue du dernier passage de Vénus sur le soleil (voir n° 83). Sans doute, ce n'est point l'un des résultats les moins remarquables de la loi de la gravitation universelle, que de voir ainsi enchaînés l'un à l'autre des phénomènes qui semblaient n'avoir aucun rapport entre eux, et la figure de la terre, sa grandeur, son aplatissement, sa distance au soleil et à la lune, pour la connaissance desquels des savants laborieux ont entrepris tant de périlleux voyages, déterminés par un astronome, sans sortir, pour ainsi dire, de son cabinet, d'une manière plus exacte peut-être qu'elles ne le seront jamais par des mesures directes.

202. En résumant tout ce que nous venons de dire, on voit que la théorie explique d'une manière très-satisfai-

sante les principaux phénomènes que le mouvement de la lune nous présente, tels que les déplacements de la ligne des apsides, de la ligne des nœuds, les oscillations du plan de l'orbite lunaire, etc. La loi de la gravitation suffit pour rendre compte de toutes les grandes inégalités que l'observation a fait successivement découvrir dans le mouvement de la lune, et elle en a indiqué de nouvelles qui, par la complication de leurs arguments ou l'étendue de leurs périodes, seraient demeurées longtemps confondues entre elles sans qu'on pût en deviner les causes. L'analyse indique à l'astronome les arguments des inégalités qui, par quelques circonstances particulières, peuvent devenir sensibles, et l'on détermine leurs coefficients par la comparaison des observations les plus propres à faire ressortir les nouvelles équations auxquelles on veut avoir égard, et à en constater l'existence (1). C'est par la réunion de ces deux méthodes, le calcul et l'observation, qu'on est parvenu à donner aux tables des

(1) C'est de cette manière qu'ont été formées les premières tables un peu exactes que nous ayons eues du mouvement de la lune; cependant on peut déterminer toutes les inégalités du mouvement lunaire par la seule application de la théorie de la gravitation, et en n'empruntant à l'observation que les données indispensables qui dépendent de la position de la lune et des éléments de son orbite elliptique, à une époque donnée. Cette méthode est sans doute, pour un esprit philosophique, la plus satisfaisante, puisqu'elle fait sortir d'un même principe toutes ses conséquences, mais les calculs qu'elle exige pour atteindre à la précision des observations sont extrêmement pénibles. Au reste, nous possédons aujourd'hui des tables fort exactes calculées dans les deux systèmes: par l'observation et la théorie réunies, celles de Burg, de Burckart; par la seule théorie, celles de M. Damoiseau.

mouvements lunaires la précision qu'elles ont aujourd'hui; les erreurs qu'elles peuvent présenter, dans les cas les plus défavorables, ne s'élèvent guère à plus de 12 à 13". Avant Newton, on n'aurait pu répondre de l'exactitude à 6' près, quoiqu'on employât dans la formation des tables les cinq équations principales de la lune, dont les deux premières, l'équation du centre et l'évection, avaient été assez bien déterminées par les anciens astronomes, et les trois autres, la variation, l'équation annuelle et l'inégalité de la latitude, par Tycho et Kepler. La théorie de l'attraction a donc enfin soumis à l'astronomie cet astre qui, par le grand nombre et l'étendue de ses perturbations, semblait vouloir échapper à toutes ses prévisions et présenter à ses investigations un problème impénétrable.

CHAPITRE VI.

INÉGALITÉS DU MOUVEMENT DES SATELLITES DE JUPITER,
SATURNE ET URANUS.

Rapports remarquables entre les moyens mouvements des trois premiers satellites de Jupiter. — Rapports entre les longitudes moyennes sidérales et synodiques. — Ces trois satellites ne peuvent s'éclipser à la fois. — Masses des satellites de Jupiter. — Aplatissement de la planète. — Satellites et anneau de Saturne. — Satellites d'Uranus.

203. Les satellites de Jupiter forment autour de leur planète comme un système particulier, dont les rapides variations nous représentent, sous de petites dimensions, l'image des changements qui ne s'opèrent qu'avec une extrême lenteur dans le système du soleil et des planètes. Leurs mouvements sont assujettis à des inégalités périodiques très-sensibles, qui avaient longtemps embarrassé les astronomes; mais la théorie, en découvrant leur cause, a rendu leur recherche beaucoup plus facile, et a fourni le moyen de les soumettre au calcul. Ces inégalités sont introduites dans les mouvements elliptiques

des satellites par leurs actions réciproques ; elles sont surtout sensibles pour les trois premiers satellites à cause de leur rapprochement. Les plus considérables résultent du rapport qui existe entre les durées des révolutions de ces trois astres ; ces durées sont entre elles à peu près comme les nombres 1, 2 et 4, ce qui produit entre leurs moyens mouvements le rapport énoncé n° 117, et en vertu duquel *le moyen mouvement du premier satellite, plus deux fois celui du troisième, est à peu près égal à trois fois celui du second*. En effet, on a $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. Toutes ces inégalités, dont les périodes diffèrent entre elles, se transforment dans les éclipses en une seule, dont la période est de 437,659 jours, intervalle qui ramène les trois satellites à la même configuration.

L'observation a fait connaître encore, comme on l'a vu n° 117, une relation très-remarquable entre les longitudes moyennes des trois premiers satellites de Jupiter ; elle consiste en ce que *la longitude moyenne sidérale du premier satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, n'a jamais différé de deux angles droits que d'une quantité insensible*. Il était curieux de rechercher si ce rapport, que l'on observe depuis la découverte des satellites de Jupiter, a toujours existé, et s'il se maintiendra constamment le même dans les siècles à venir. Laplace a montré que, pour que ce rapport ait lieu, il n'est pas nécessaire que les mouvements primitifs des trois satellites aient satisfait exactement à la condition qu'il exige, ce qui serait en effet peu vraisemblable ; il suffit qu'ils ne s'en soient pas écartés au delà de certaines limites que la théorie détermine ; l'attraction mutuelle

des trois satellites a suffi ensuite pour rendre le rapport rigoureux, et cette même cause le maintiendra éternellement tel qu'il est aujourd'hui. Il faut observer cependant que si le rapport dont il s'agit, n'avait pas été rigoureusement exact à l'origine, il en serait résulté dans les mouvements des trois satellites des variations périodiques ou *librations* d'une étendue arbitraire qui subsisteraient encore actuellement. Or comme les observations les plus précises n'indiquent aucune variation de ce genre, il en faut conclure ou que les rapports précédents, entre les longitudes et les moyens mouvements des trois premiers satellites, ont été d'une exactitude rigoureuse dès l'origine, ou que s'ils s'en sont écartés, ce n'a été du moins que d'une quantité insensible.

On a vu n° 117 que les relations qui existent entre les mouvements moyens et les longitudes moyennes sidérales, c'est-à-dire comptées d'une origine fixe, ont également lieu relativement aux moyens mouvements et aux longitudes moyennes synodiques, c'est-à-dire rapportées au soleil, d'où l'on a conclu que les trois satellites ne pourront jamais être éclipsés à la fois, en sorte qu'il en restera toujours au moins un sur chaque horizon de la planète pour éclairer ses nuits. En effet, dans ce cas, les longitudes synodiques des trois satellites seraient égales chacune à 180° , et la relation qui doit exister entre elles, ne pourrait être satisfaite (1).

(1) Soit v' la longitude synodique du premier satellite on sa distance angulaire au soleil vue du centre de Jupiter, v'' celle du second, et v''' celle du troisième, on aura, d'après la relation énoncée,

$$v' + 2v'' - 3v''' = 180^\circ.$$

Mais dans le cas d'une éclipse simultanée des trois satellites, les

L'observation montre que les éléments des orbites des satellites sont variables comme ceux des orbites planétaires. Ainsi, leurs apsides ont un mouvement semblable à celui des périhélies des planètes. Leurs inclinaisons et leurs nœuds sur l'orbite de la planète varient également, et l'on représente à très-peu près ces variations, en supposant que le plan de l'orbite du premier satellite oscille sur l'équateur de Jupiter, et que les orbites des trois autres satellites oscillent sur des plans qui font avec l'équateur de Jupiter des angles constants; ces plans sont situés entre l'équateur et l'orbite de Jupiter, et passent toujours par l'intersection commune des deux plans. Les nœuds des orbites ont, sur ces plans, un mouvement rétrograde dont la période varie; elle est de 30 ans pour le deuxième satellite, de 142 ans pour le troisième, et de 531 ans pour le quatrième. Enfin, les orbites des satellites sont entraînées par l'équateur de Jupiter, dont les nœuds ont un mouvement rétrograde sur le plan de l'orbite de la planète.

204. La cause qui produit les inégalités des satellites étant connue, on a pu les employer à la détermination de leurs masses, qu'il eût été impossible d'obtenir par des me-

longitudes ν' , ν'' et ν''' seraient égales chacune à 180° , et l'on aurait par conséquent $\nu' + 2\nu''' - 3\nu'' = 0$, ce qui est contre la supposition.

Dans les éclipses simultanées du second et du troisième satellite, on a $\nu'' = \nu''' = 180^\circ$, par conséquent $\nu' = 360^\circ$; la longitude du premier satellite est donc nulle alors, c'est-à-dire qu'au lieu d'être éclipsé en même temps que les deux autres satellites, le premier satellite est en conjonction avec Jupiter, lorsque le second et le troisième sont dans l'ombre; il est toujours éclipsé au contraire quand les deux autres sont en conjonction; car on a alors $\nu'' = \nu''' = 0$, et par conséquent $\nu' = 180^\circ$.

sures directes à cause de leur extrême petitesse. En effet, en formant par la théorie les coefficients de chaque inégalité, et en l'égalant à sa valeur donnée par l'observation, on en conclut celle de la masse du satellite, ou du moins le rapport de cette masse à celle de la planète. On a trouvé ainsi, d'après les données les plus certaines qu'ait fourni l'observation :

*Masses des satellites de Jupiter, cel'e de la planète
étant prise pour unité.*

1 ^{er} Satellite.	$\frac{1}{82729}$
2 ^e Satellite.	$\frac{1}{413637}$
3 ^e Satellite.	$\frac{1}{11196}$
4 ^e Satellite.	$\frac{1}{23141}$

Un résultat non moins curieux que le précédent, et qui se déduit encore des inégalités des satellites, est la connaissance qu'elles ont fournie de la figure du sphéroïde de Jupiter. En effet, la grande influence que son ellipticité exerce sur le mouvement des nœuds, a permis de la déterminer très-exactement par la comparaison de ce mouvement donné par l'observation, à la formule analytique qui s'y rapporte. On a trouvé, de cette manière, que le rapport de l'axe de rotation de Jupiter au diamètre de son équateur est 0,9286, ce qui diffère peu de la valeur de ce rapport donné par la mesure des deux axes de la planète n° 89.

Les tables des satellites de Jupiter, calculées d'après les formules de la théorie et les éléments de leurs mouvements elliptiques déduits de l'observation, représen-

tent les éclipses observées avec toute l'exactitude désirable ; on peut même assurer que les erreurs des tables sont en général moindres que celles dont les observations sont susceptibles. Ces perfectionnements donnés aux tables des satellites, étaient d'une grande importance à cause de leur utilité pour la détermination des longitudes terrestres.

205. Les satellites de Saturne sont si difficiles à observer que nous avons à peine encore des données exactes sur quelques-uns de leurs éléments : les géomètres ont donc pensé qu'il était jusqu'à présent inutile de s'occuper de leurs perturbations.

Nous avons vu, n° 100, que Saturne est environné d'un anneau large, d'une très-mince épaisseur, et incliné de 30° à peu près au plan de son orbite. Cet anneau se divise en deux anneaux concentriques et séparés par un très-petit intervalle. Si ces anneaux étaient suspendus autour de la planète par la seule force de cohésion de leurs parties, on pourrait craindre, que par l'action continue de la planète, elles ne vinssent à se disjoindre à la longue, comme il arrive à tous les ouvrages de la nature qui n'ont pas en eux-mêmes une cause de stabilité assurée ; les fragments de l'anneau ainsi brisé, se seraient précipités vers la planète ou auraient continué à circuler autour d'elle comme autant de satellites différents. Cela n'étant pas arrivé, on a dû penser que les anneaux se maintiennent autour de la planète par un mécanisme particulier qui dépend des lois de l'équilibre des fluides. Maupertuis avait le premier abordé cette question ; Laplace l'a depuis traitée plus complètement dans la Mécanique Céleste : il a fait

voir que l'anneau supposé fluide peut se maintenir en équilibre autour de Saturne, en vertu de l'attraction mutuelle de ses molécules et de leur pesanteur vers la planète, combinées avec un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire à son plan et passant par le centre de Saturne. La force centrifuge qui résulte de ce mouvement de rotation balance la tendance des molécules vers la planète, et assure leur permanence.

Quant à la durée de la rotation de l'anneau, elle doit être la même que celle de la révolution d'un satellite, dont la distance au centre de Saturne serait à peu près égale à la distance moyenne du bord supérieur et du bord inférieur de l'anneau, au même point. C'est ainsi que Laplace avait trouvé que la durée de cette rotation est de $\frac{4}{17}$ de jour environ, ce qui a été depuis confirmé par W. Herschel, n° 100, qui a trouvé la durée exacte de la rotation de l'anneau de 10 h. $\frac{7}{8}$, plus longue de 16'' seulement que la durée de la rotation de la planète. Ainsi la théorie avait découvert la mobilité de l'anneau de Saturne et la durée de sa rotation avant qu'elles n'eussent été reconnues par les observations.

206. Les satellites d'Uranus nous sont encore moins connus que ceux de Saturne; tout ce qu'on sait jusqu'ici d'après les observations d'Herschel, c'est qu'ils se meuvent à très-peu près dans un même plan presque perpendiculaire à celui de l'orbite de la planète. La petitesse de ces astres et leur éloignement nous laissent peu d'espoir d'acquérir à leur égard des notions plus étendues, à moins de quelque perfectionnement inespéré dans nos moyens d'observations.

CHAPITRE VII.

PERTURBATIONS DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE DES COMÈTES.

Moyen de calculer les variations de chacun des éléments de l'orbite elliptique d'une comète troublée par l'attraction des planètes auprès desquelles elle passe. — Prédiction de ses retours futurs. — Application aux comètes périodiques de 1759, de 1819 et de 1826. — Disparition remarquable de la comète de 1769 par l'action des planètes. — Considérations sur les masses des comètes.

207. Les comètes sont sujettes comme les planètes à des inégalités qui troublent leurs mouvements elliptiques, et qui sont surtout sensibles dans la durée de leurs révolutions. La détermination de ces perturbations est un problème important en astronomie, parce qu'elle peut seule nous mettre en état de suivre ces astres dans leur marche, lorsqu'ils sont dans la partie supérieure de leurs orbites, et de prévoir à l'avance l'instant précis de leur retour au périhélie. En effet, l'observation suffit pour déterminer tous les éléments du mouvement elliptique des planètes et des comètes; on pourrait même, par l'étude attentive du cours d'une planète, reconnaître tou-

tes les inégalités qu'elle éprouve et qui l'écartent légèrement des lois du mouvement dans l'ellipse; mais les comètes n'étant visibles pour nous que dans une petite partie de leur orbite, il serait impossible de déterminer, par le secours seul de l'observation, les perturbations qu'elles subissent lorsqu'elles se trouvent à des distances où nous ne pouvons les suivre que par la pensée. Cette question est donc du nombre de celles qui ne peuvent être abordées que par la théorie; essayons de montrer, autant qu'on le peut faire sans le secours du calcul, comment les géomètres sont parvenus à la résoudre.

La recherche des inégalités planétaires est facilitée par la petitesse des excentricités de leurs orbites qui ne s'écartent que légèrement de la forme circulaire, et par leur peu d'inclinaison à l'écliptique. Mais il n'en est pas de même à l'égard des comètes dont les excentricités ne sont renfermées dans aucune limite fixe, et dont les orbites peuvent être inclinées à l'écliptique depuis zéro jusqu'à l'angle droit; les méthodes ordinaires d'approximation employées dans la théorie des planètes ne peuvent donc leur être appliquées, et l'on est obligé de recourir, pour déterminer leurs perturbations, à des moyens particuliers. Le plus simple est celui qui consiste à supposer que les comètes, troublées par l'attraction des planètes auprès desquelles elles passent, obéissent encore aux lois du mouvement elliptique, mais que les éléments de leurs orbites, au lieu d'être constants comme ils le seraient si ces astres n'étaient soumis qu'à l'action du soleil, changent par degrés insensibles en vertu des forces secondaires qui les animent. C'est d'ailleurs une

hypothèse parfaitement conforme à l'observation qui montre que les éléments des comètes dont le retour est connu, ne sont pas constants, et varient, ainsi que la durée de leurs périodes, à chacune de leurs révolutions.

Pour déterminer les altérations des éléments du mouvement elliptique d'une comète, on divise son orbite en parties assez petites, pour qu'on puisse supposer la force perturbatrice constante pendant l'intervalle que la comète emploie à les parcourir, et ne variant que d'une portion de la courbe à l'autre. On calcule alors facilement l'altération que subit chacun des éléments de l'orbite pendant chaque intervalle, et en faisant la somme de toutes ces altérations partielles, ou plus exactement en les réunissant par les formules qu'emploient les géomètres dans les méthodes qu'ils nomment *quadratures mécaniques*, on forme la variation totale qu'éprouve cet élément. On conçoit qu'en divisant successivement l'orbite en un plus grand nombre de parties, on peut approcher ainsi aussi près que l'on veut d'une rigoureuse exactitude; mais les calculs que cette méthode exige sont très-pénibles, surtout quand il s'agit d'une comète dont la révolution est d'une longue durée, comme celle de 1759, et il serait à désirer qu'on pût, par quelque procédé nouveau, parvenir à les abrégier (1).

(1) « Sans doute, on pourrait désirer, pour déterminer ces perturbations, une méthode dont l'application numérique fût plus simple; mais, par la nature même des difficultés que présente la question, il me paraît douteux qu'on y parvienne, et il est probable que longtemps encore ce sera à la patience du calculateur à suppléer sur ce point aux imperfections de l'analyse. » (*Théorie analytique du Système du Monde*, t. II, p. 85.) Voilà ce que je

208. Clairaut est le premier géomètre qui ait tenté de déterminer par un calcul exact le retour d'une comète. Il appliqua à la comète de 1682 les formules qui lui avaient servi pour résoudre le problème des trois corps ; le retour de cette comète , d'après les ingénieux aperçus de Halley , était attendu pour la fin de 1758 ou le commencement de 1759. Clairaut, par d'immenses calculs, détermina les perturbations que la comète avait subies durant les deux périodes successives de 1607 à 1682 et de 1682 à 1759, par l'action de Jupiter et de Saturne. Il trouva ainsi que la période que la comète allait achever, devait être de 432 jours plus courte que celle qui l'avait précédée, en sorte qu'elle passerait au périhélie le 18 avril 1759. Le passage eut lieu le 12 mars de la même année, c'est-à-dire *trente-sept* jours avant l'époque que le géomètre lui avait assignée. Mais il faut observer que Clairaut ayant ensuite repris ses calculs et complété ceux que le temps ne lui avait pas permis d'achever, il reporta le passage au 4 avril, en sorte que l'erreur de la prédiction se réduisit ainsi à *vingt-trois* jours, et sans doute Clairaut se serait encore rapproché de la vérité, s'il eût employé la masse de Saturne telle que nous la connaissons aujourd'hui, et s'il eût fait entrer dans ses calculs les perturbations causées par la planète Uranus qui n'était pas encore connue de son temps.

disais il y a dix ans. De nouveaux efforts ont été tentés avec un zèle très-lonable, depuis cette époque, pour surmonter les difficultés que nous venons de signaler dans le calcul des perturbations des comètes et des planètes télescopiques ; mais ces efforts, inutiles jusqu'ici pour les applications, me semblent devoir bien plutôt servir à confirmer ma prédiction, qu'à lui donner un démenti.

Les perfectionnements introduits depuis cette époque dans les méthodes analytiques, ont permis d'atteindre à un plus haut degré de précision, et la même comète devant revenir à son périhélie en 1835, l'académie des sciences de Turin fit du calcul de ses perturbations le sujet d'un prix qui fut accordé à M. Damoiseau, en 1819. L'académie des sciences de Paris ayant remis le même sujet au concours en 1829, le désir de juger par moi-même de l'état de nos ressources sur ce point important de l'astronomie théorique, me porta à répondre à cet appel, et les résultats que j'obtins alors ont depuis été pleinement confirmés par l'événement.

Je calculai d'abord les perturbations de la comète depuis son passage au périhélie 1682 jusqu'à son retour au même point en 1759, en tenant compte des actions de Jupiter, Saturne et Uranus pendant cette période, afin de fixer la valeur du grand axe et du moyen mouvement à cette dernière époque. Je déterminai ensuite les perturbations de la comète pendant la période suivante en tenant compte à la fois des actions de Jupiter, de Saturne, d'Uranus et de la Terre; la comète ayant dû passer en 1759 assez près de cette dernière planète pour en éprouver des perturbations sensibles. Je fus ainsi conduit à fixer son prochain retour au périhélie d'abord au 13 novembre 1835; mais ayant depuis corrigé la masse de Jupiter que j'avais employée dans mes calculs, j'ai trouvé que le passage devait être reculé jusqu'au 15,2 novembre; la comète est passée au périhélie le 16 novembre à 9 h. 36' du soir: la différence entre les résultats du calcul et de l'observation se réduirait

donc ainsi à *moins d'un jour* (1), et sans doute c'est bien peu sur une révolution de *soixante et quinze ans*; ce résultat mérite d'être rappelé comme l'un des plus propres à nous montrer la puissance qu'a acquise aujourd'hui l'application de l'analyse au système du monde. Ajoutons que le rapprochement de la théorie et de l'observation, produit par un simple changement dans la masse de Jupiter, semble confirmer pleinement la nécessité de la correction qu'on a fait subir, dans ces derniers temps, à la valeur de cette masse adoptée depuis Newton (2).

209. On a appliqué de même le calcul des perturbations à la détermination des dérangements qu'a dû éprouver dans sa marche la comète à courte période de 1819, et cette application a donné lieu à une remarque importante. On a cru que pour rendre raison de quelques différences que présentaient les résultats du calcul et des observations faites en 1805, 1795 et 1786, époque à laquelle paraissent remonter les premières observations de

(1) M. Damoiseau avait fixé le retour de la comète au 4 novembre; la différence entre le calcul et l'observation était donc encore de 12 jours; mes recherches, comme on voit, l'ont fait presque entièrement disparaître. (Consulter, pour plus de détails, l'excellente notice insérée sur ce sujet par M. Arago, dans l'*Annuaire* de 1836, et un Mémoire dans lequel j'ai donné les résultats de mes calculs (*Connaissance des temps*, 1838).

(2) D'après les élongations du 4^e satellite observées par Pound, la masse de Jupiter, calculée par Newton, était le 1067^e de celle du soleil; elle en est la 1048^e,69 partie, n° 182, selon les élongations du même satellite observées en 1833, par M. Airy; cette valeur s'accorde avec celle qui résulte du calcul des perturbations des petites planètes, par MM. Nicolaï, Encke, Gauss, etc.

cette comète, il était indispensable d'admettre l'existence d'une force perturbatrice nouvelle, qui concourrait, avec l'action des planètes, à déranger son mouvement elliptique, et l'on a supposé que cette force était la résistance d'un milieu éthéré répandu autour du soleil. L'action de ce fluide est insensible sur les planètes, puisque l'observation ne nous a indiqué dans leur marche aucune inégalité provenant d'une pareille cause; mais s'il existait réellement, son influence serait sans doute beaucoup plus sensible sur les comètes, à cause de l'extrême rareté de la matière qui les compose, de même que nous voyons à la surface de la terre la résistance de l'air altérer d'autant plus les mouvements des corps pesants que leur densité est plus petite. Cependant l'accord qui se rétablit entre les résultats du calcul et ceux de l'observation à partir de 1819, accord qui est devenu plus parfait à mesure que les éléments de la comète ont été mieux connus, doit faire penser que les différences précédentes étaient dues simplement aux erreurs des observations antérieures à 1819, époque où l'on a reconnu pour la première fois la périodicité de la comète, et où l'on a commencé à l'observer avec soin. Enfin, le retour de la comète de 1759, concordant presque avec l'instants que la théorie lui avait assigné, semble avoir décidé la question, et l'hypothèse d'un milieu résistant doit être écartée jusqu'à ce que quelque nouveau phénomène en fasse juger l'admission indispensable.

210. Les altérations de la comète périodique de 1826, et l'époque de son retour au périhélie en 1832, ont été déterminées par M. Damoiseau; l'événement a depuis con-

firmé ses calculs. Cette comète repassera au périhélie dans le mois de mai de l'année 1839.

211. Nous avons vu que la théorie démontre que les orbites planétaires resteront dans tous les temps peu excentriques et médiocrement inclinées au plan de l'écliptique comme ils le sont aujourd'hui ; le système solaire n'éprouvera, à cet égard, que des altérations qui se compenseront dans la suite des siècles, de manière qu'il demeurera à la longue dans un état de stabilité parfaite. Cette propriété remarquable tient à la constitution même du système planétaire, elle résulte de la petitesse des excentricités et des inclinaisons, et de ce que toutes les planètes tournent dans le même sens autour du soleil. Mais ces conditions n'étant plus remplies relativement aux comètes, rien n'empêche que la nature même de leurs orbites ne soit changée lorsqu'elles approchent assez près des planètes pour que l'attraction qu'elles en éprouvent contrebalance celle du soleil.

Déjà une comète qui avait paru en 1770, et dont on attendait le retour en 1776, semble avoir présenté l'exemple d'un pareil changement. Lexel avait reconnu que pendant son apparition cette comète avait décrit un arc d'ellipse dans laquelle la durée de la révolution était de moins de six ans, et il était parvenu ainsi à représenter avec beaucoup d'exactitude toutes les observations de la comète qui se refusait absolument à l'hypothèse d'un mouvement parabolique. Un astre dont la période était si courte, aurait dû souvent se remontrer en revenant à son périhélie, et pourtant on ne l'avait jamais observé avant l'apparition de 1770, et depuis on ne l'a plus revu. Lexel, pour expliquer ce double phénomène,

remarqua que la comète s'était assez approchée de Jupiter, en 1767 et 1779, pour que l'action de cette planète eût diminué sa distance périhélie de manière à rendre la comète visible en 1770, d'invisible qu'elle était auparavant, et qu'au contraire, en 1779, elle ait augmenté cette même distance au point de rendre la comète pour toujours invisible. L'analyse a vérifié cette conjecture en démontrant qu'il suffisait, pour satisfaire aux conditions précédentes, de supposer dans les éléments de l'orbite de la comète, en 1770, des altérations très-légères, comprises dans les limites de celles que l'attraction des planètes a pu produire dans l'intervalle de 1769 à 1779. La disparition d'une comète, par le seul effet de l'action des planètes, est devenue ainsi un phénomène extrêmement vraisemblable.

La comète de 1770 a été encore très-remarquable en ce que de toutes les comètes connues, elle est celle qui a le plus approché de la terre. Son influence, à raison de ce rapprochement, aurait donc pu causer dans le mouvement du globe, et dans la durée de sa révolution, des altérations sensibles. On a calculé par exemple, qu'en supposant la masse de la comète égale à celle de la terre, elle aurait augmenté de $2^h 47' 13''$ la longueur de l'année sidérale. Or, l'observation montre que l'année sidérale n'a pas subi une altération de $2''$ par l'action de la comète de 1770; il en résulte que le rapport de sa masse à celle de la terre, est moindre que celui de $2''$ à $2^h 47' 13''$, et qu'elle n'est pas, par conséquent, la $\frac{1}{5000}$ partie de celle de la terre. Cette même comète a traversé, en 1769, le système entier des satellites de Jupiter sans y causer aucun dérangement appréciable. On

est donc assuré que les masses des comètes sont d'une excessive petitesse, et que leur action sur les autres corps du système solaire est absolument insensible. Il est même très-vraisemblable que si l'une d'elles, dans la suite des temps, venait à rencontrer une planète ou un satellite, le choc qui en résulterait n'exercerait qu'une très-faible influence sur les mouvements de ces corps.

Sans aucun doute ce phénomène a eu lieu plus d'une fois dans l'immensité des siècles écoulés ; mais comme il n'en est résulté aucune perturbation apparente dans les mouvements planétaires, on doit supposer que les masses des comètes sont trop petites pour avoir, sur la constitution du système solaire, aucune influence appréciable. Nous avons vu que les planètes circulent toutes dans le même sens, d'occident en orient, autour du Soleil, et que la figure de leurs orbites diffère peu de celle du cercle ; il est très-vraisemblable que ces phénomènes tiennent aux circonstances qui ont présidé à la formation du système planétaire, et subsistent par conséquent depuis l'origine des temps. L'action ou le choc des comètes n'a donc point altéré ces phénomènes, comme cela aurait eu lieu nécessairement si l'une d'elles avait eu une masse comparable à celle des planètes ou seulement des satellites. Il y a encore en astronomie deux phénomènes très remarquables qui peuvent servir à nous rassurer sur l'influence des comètes. On sait, n° 60, que la Lune nous présente toujours le même hémisphère, et l'on ne peut expliquer cette circonstance qu'en admettant une parfaite égalité entre son mouvement de rotation et son mouvement de translation, soit qu'elle date de l'origine du système planétaire, soit qu'elle se soit établie

par l'effet de l'attraction de la Terre sur le sphéroïde lunaire. La plus légère différence qui existerait entre ces mouvements, produirait dans le grand axe de l'hémisphère que la Lune nous présente, une espèce de balancement ou de *libration* qui ne pourrait pas échapper à la précision des observations modernes. On a calculé que le choc d'une comète, dont la masse ne serait qu'un *millième* de celle de la Lune, aurait suffi pour donner une valeur très-sensible à sa *libration réelle* ou à celle des satellites de Jupiter. La conservation de ces phénomènes dans l'état où ils ont dû exister à l'origine du monde, nous montre donc que, parmi les comètes qui ont rencontré les planètes et les satellites, il n'y en a aucune dont la masse ait été assez considérable pour exercer sur leur mouvement aucune action appréciable, et leur choc a dû se borner à des commotions locales.

CHAPITRE VIII.

DE LA FIGURE DES CORPS CÉLESTES.

Figure qui convient à l'équilibre d'une masse fluide douée d'un mouvement de rotation. — Cas où le fluide est homogène. — Cas où il est composé de couches homogènes, de densités variables de la surface au centre. — La figure elliptique satisfait dans les deux cas aux conditions de l'équilibre. — Variations de la pesanteur à la surface du sphéroïde. — Conséquences qui en résultent relativement à la terre. — Application de la théorie précédente à Jupiter.

212. Pour traiter cette question dans toute sa généralité, il faut supposer que les planètes ont été originellement fluides, de manière qu'elles ont pu prendre toutes les figures possibles, et déterminer quelle est celle à laquelle elles ont dû s'arrêter, pour arriver à l'état d'équilibre, sous l'influence de toutes les forces qui agissaient sur elles. Imaginons d'abord, pour rendre la question plus simple, une planète qui n'aurait point de mouvement de rotation, et qui serait formée d'un fluide homogène dont tous les éléments s'attirent mutuellement en raison inverse du carré des distances. Les différentes parties du fluide, pour se mettre en équilibre, se seront disposées autour du centre de gravité de la masse, en couches sphériques dont la densité ira en augmentant de la sur-

face au centre, à raison de la plus grande pression que supportent les couches qui avoisinent ce point ; quant à la pesanteur à la surface du fluide, c'est-à-dire à la résultante des attractions qu'exercent toutes les parties du fluide sur un point placé à sa surface, elle sera constante et identiquement la même que si la masse entière de la planète ne formait qu'un point matériel placé à son centre de gravité. (Voir la note page 523.)

Mais la figure des corps célestes est plus compliquée, le mouvement de rotation dont ils sont doués les écarte de la figure sphérique. La force centrifuge qui en résulte, va en augmentant à mesure que l'on s'éloigne des pôles, où cette vitesse est nulle ; les molécules ont donc à l'équateur une plus grande tendance que partout ailleurs à s'écarter de l'axe de rotation, et la masse fluide, en vertu de son mouvement de rotation, doit prendre la forme d'un sphéroïde renflé sous l'équateur et aplati aux pôles. La pesanteur à la surface de ce sphéroïde n'est plus dirigée vers son centre, et son intensité varie des pôles à l'équateur ; pour déterminer dans ce cas la figure qui convient à l'équilibre, il faudrait connaître *à priori* la loi de ces variations, qui elle-même dépend de la densité des molécules dont le fluide est composé et de leur arrangement mutuel, c'est-à-dire de la forme même du corps qu'on s'est proposé de déterminer. Cette liaison réciproque des deux principales inconnues du problème, le rend très-difficile à traiter par la théorie, et l'on n'est parvenu à le résoudre, qu'en formant d'abord une hypothèse sur la figure et la constitution de la masse fluide, et en déterminant ensuite dans cette supposition la loi d'attraction de toutes ses parties, et les conditions à remplir pour que l'équi-

libre puisse avoir lieu avec la figure arbitraire que l'on a choisie.

L'ellipse étant après le cercle la plus simple des courbes que nous puissions concevoir, on dut d'abord supposer aux corps célestes la figure de sphéroïdes engendrés par la révolution d'une ellipse qui tourne autour de son petit axe, ou, selon l'expression géométrique, la figure d'*ellipsoïdes* de révolutions aplatis à leurs pôles. Newton, en partant de cette supposition, trouva que, dans le cas d'une égale densité de tous ses éléments, le rapport des deux axes de l'ellipsoïde terrestre devait être celui de 229 à 230. Dans un ellipsoïde de révolution, on appelle *ellipticité* ou *aplatissement* l'excès du plus grand des deux axes, pris pour une unité, sur le plus petit. L'aplatissement de la terre regardée comme homogène, serait donc ainsi de $\frac{1}{230}$.

213. Newton, en donnant à la terre et aux planètes une figure déterminée, supposait *à priori* ce qui était en question. L'analyse a depuis justifié ce que cette hypothèse avait d'arbitraire, et elle a montré que la figure elliptique satisfait en effet aux conditions d'équilibre d'une masse fluide homogène, douée d'un mouvement de rotation, et dont tous les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles. L'aplatissement du sphéroïde dépend en général de la vitesse du mouvement de rotation et de la loi d'attraction. Dans le cas de la nature, c'est-à-dire en supposant que toutes les molécules s'attirent en raison inverse du carré des distances, l'analyse prouve que dans les sphéroïdes peu aplatis, l'ellipticité est égale à $\frac{1}{4}$ du rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur. Nous avons vu n° 173 que ce rap-

port était $\frac{1}{185}$ pour la terre, ce qui donne $\frac{1}{110}$ à peu près pour l'aplatissement du sphéroïde terrestre dans le cas de l'homogénéité, comme l'avait trouvé Newton.

L'analyse montre encore que pour le même mouvement de rotation, il y a toujours deux figures elliptiques qui satisfont à l'équilibre. Le diamètre de l'équateur, dans les deux surfaces, est plus grand que l'axe des pôles, et l'équilibre n'est pas possible avec une figure allongée vers les pôles. Enfin l'analyse assigne à la vitesse de rotation une limite au delà de laquelle l'équilibre ne serait plus possible avec une figure elliptique. Ainsi, la plus petite durée de la rotation d'une masse fluide homogène de même densité que la terre, serait de $2^h 24'$ à peu près; c'est-à-dire que si la terre, supposée originellement fluide, avait tourné sur son centre en moins de $2^h 24'$, il eût été impossible d'assigner une figure elliptique telle que les attractions mutuelles de ses éléments, combinées avec la force centrifuge, pussent avoir une résultante perpendiculaire à la surface de la masse fluide, condition nécessaire pour assurer son équilibre.

Il est cependant important d'observer que quand bien même la condition précédente ne serait pas remplie à l'origine du mouvement, il ne faudrait pourtant pas conclure que l'équilibre de la masse fluide fût à jamais impossible avec une figure elliptique. En effet, en tournant autour de son axe, la masse peut s'aplatir de plus en plus sans cesser d'être continue; la durée de la rotation augmente ainsi progressivement, et elle finit par atteindre la limite qui convient à l'équilibre. La masse fluide après diverses oscillations se fixe alors à la forme de l'ellipsoïde de révolution, comme si la condition re-

lative à la vitesse de rotation avait été satisfaite dès l'origine.

214. On détermine aisément dans l'hypothèse précédente, les variations de la pesanteur à la surface du sphéroïde. En effet, supposons la terre entièrement fluide et homogène, et concevons dans l'intérieur de cette masse deux colonnes fluides partant du centre, et dirigées l'une vers les pôles, l'autre vers un point de l'équateur : il faudra pour qu'il y ait équilibre, que les poids des deux colonnes se contrebalancent exactement ; or, la première colonne étant plus courte que la seconde dans le cas de l'ellipsoïde aplati vers les pôles, il faudra par compensation que la pesanteur soit moindre à l'équateur qu'aux pôles. Réciproquement, si la pesanteur va en croissant de l'équateur aux pôles, on en pourra conclure, par le même raisonnement, que la figure de l'ellipsoïde est allongée dans le sens de l'équateur. Le calcul montre de plus que les poids des deux colonnes fluides, que nous venons de considérer, sont entre eux comme les produits de leur longueur par les pesanteurs aux points de la surface où elles vont aboutir, et comme ces poids sont égaux dans le cas de l'équilibre, il en résulte que les pesanteurs à la surface du sphéroïde sont réciproquement proportionnelles aux longueurs des colonnes. Par conséquent dans un ellipsoïde homogène *la pesanteur aux pôles est à la pesanteur à l'équateur, comme le diamètre de l'équateur est à l'axe des pôles*. C'est-à-dire que sur la terre, où dans cette hypothèse le rapport des deux axes du sphéroïde est celui de 230 à 229, la pesanteur aux pôles surpasserait de $\frac{1}{229}$ la pesanteur à l'équateur.

Comparons ce résultat aux observations. Nous avons vu n° 173, que deux causes font varier la pesanteur à la surface de la terre, l'accroissement de la force centrifuge et la diminution de l'attraction terrestre des pôles à l'équateur. La force centrifuge diminue la pesanteur en chaque point de la surface du globe, et cette diminution est égale à un $\frac{1}{289}$ de la pesanteur à l'équateur, multiplié par le carré du cosinus de la latitude. Les variations de la pesanteur, provenant de cette cause, s'ajoutent à celles qui résultent de ce que la terre s'écarte de la figure sphérique, et la variation totale de la pesanteur des pôles à l'équateur d'après les observations du pendule, est égale à $\frac{1}{166}$, multiplié par le carré du cosinus de la latitude, la pesanteur à l'équateur étant prise pour unité. Cette diminution, en supposant toutes les parties de la terre d'égale densité, serait par ce qui précède de $\frac{1}{179}$, elle est donc plus grande réellement qu'elle ne le serait dans cette hypothèse, et la terre par conséquent n'est pas un sphéroïde homogène comme nous l'avions supposé. Il est naturel de penser, en effet, que la densité des couches terrestres va en croissant de la surface au centre, et nous verrons par la suite que cette condition est nécessaire pour assurer la stabilité de l'équilibre des mers, qui, sans cela pourraient abandonner leur lit pour se répandre sur les continents.

215. Considérons donc la question sous un point de vue plus général que nous ne l'avons fait jusqu'ici, et proposons-nous de déterminer la figure d'une masse fluide en équilibre, en la supposant composée de couches hétérogènes ou d'un noyau solide recouvert par un fluide, comme par exemple serait la terre, si elle était dans toute

son étendue envahie par la mer. Clairaut prouva que, dans ces deux cas, l'équilibre est encore possible avec une figure elliptique plus ou moins aplatie, selon la disposition des différentes couches de niveau et la loi de décroissement de leur densité. Dans les hypothèses les plus probables que l'on puisse faire à cet égard, pourvu que l'on suppose la densité croissante de la surface au centre, l'aplatissement du sphéroïde est moindre qu'il ne le serait dans le cas de l'homogénéité, et plus grand que les $\frac{2}{3}$ de celui qui répond à ce cas. Nous avons vu que l'aplatissement d'un fluide homogène tournant autour d'un axe fixe, est égal à $\frac{5}{4}$ du rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur; en nommant donc q ce rapport, l'aplatissement d'un sphéroïde composé de couches hétérogènes dont les densités décroissent du centre à la surface, sera compris entre $\frac{5}{4} q$ et $\frac{1}{2} q$; la première limite se rapportant au cas où le fluide serait homogène, et la seconde au cas où les parties voisines du centre étant infiniment plus denses que le reste du sphéroïde, on pourrait supposer la masse entière réunie en ce point.

Pour la terre, le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur est égal à $\frac{1}{289}$ à peu près; les limites de son aplatissement, en la regardant comme une masse fluide dont la densité croît de la surface au centre, seraient donc $\frac{5}{289}$ et $\frac{1}{578}$, nous verrons que cet aplatissement, d'après les évaluations les plus probables, est en réalité de $\frac{1}{305}$; cette valeur tombe entre les deux limites que lui fixe la théorie.

Quant à la variation de la pesanteur à la surface du sphéroïde, elle suit la loi ordinaire relative aux sphé-

roïdes elliptiques, c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle au carré du *cosinus* de la latitude; mais l'accroissement total de sa valeur de l'équateur aux pôles est différent, et dans l'ellipsoïde hétérogène, l'excès de la pesanteur aux pôles sur la pesanteur à l'équateur, est égal au double de l'aplatissement du sphéroïde, supposé homogène, moins celui qu'il a réellement.

216. Les observations du pendule donnent $\frac{1}{300}$ à peu près pour l'accroissement de la pesanteur de l'équateur aux pôles; l'aplatissement de la terre dans le cas de l'homogénéité serait, comme nous l'avons vu, de $\frac{1}{330}$; en retranchant du double de cette quantité ou de $\frac{1}{165}$ la fraction $\frac{1}{300}$, on trouve $\frac{1}{171}$ pour l'aplatissement de l'ellipsoïde terrestre dans l'hypothèse de l'hétérogénéité de ses couches. Nous avons vu que l'aplatissement réel donné par les observations était $\frac{1}{303}$ à peu près; la différence entre cette valeur et la précédente provient sans doute des irrégularités qui peuvent écarter la terre de la figure elliptique, ou des causes accidentelles qui peuvent altérer la loi de la variation de la pesanteur à sa surface.

L'intervalle compris entre deux lieux situés sur le même méridien terrestre, et dont les verticales prolongées interceptent sur la sphère céleste un degré de grand cercle, constitue ce qu'on nomme *un degré du méridien*. Si la terre était sphérique, les degrés seraient tous de même grandeur; mais l'aplatissement de la terre fait que la longueur des degrés, mesurés à sa surface, diffère suivant qu'ils sont situés près de l'équateur ou dans le voisinage des pôles. Les degrés du méridien croissent de l'équateur aux pôles, tandis que les rayons, menés du centre de la terre à sa surface, vont en diminuant entre

les mêmes limites, et la loi qui règle ces accroissements et ces diminutions est la même que celle qu'on observe entre les variations de la pesanteur. La longueur du pendule étant proportionnelle à la pesanteur, la même loi doit exister encore entre les variations de ces longueurs dans les différents lieux de la terre. Ainsi les rayons croissent des pôles à l'équateur, et les degrés, la pesanteur et les longueurs du pendule diminuent, proportionnellement au carré du cosinus de la latitude. *L'excès du rayon de l'équateur pris pour unité, sur le rayon du pôle, est égal à l'aplatissement du sphéroïde, et l'excès du degré du pôle sur le degré de l'équateur pris pour unité est égal à trois fois cet aplatissement. Enfin, l'excès de la longueur du pendule au pôle sur sa longueur à l'équateur, divisé par cette longueur, est égal à $\frac{2}{3}$ du rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur, moins l'aplatissement du sphéroïde (1).*

On peut donc déterminer l'aplatissement de l'ellipsoïde terrestre, soit par la mesure directe des degrés du méridien à sa surface, soit par les variations de la pesanteur déduites des observations du pendule. Nous exposerons, dans le chapitre suivant, les résultats que

(1) Soit α l'aplatissement de la terre supposée elliptique, q le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur, en désignant par R le rayon terrestre, par C le degré du méridien, par P la pesanteur, et par L la longueur du pendule à secondes, qui correspondent à l'équateur, et par r, c, p, l , les mêmes quantités relatives à une latitude quelconque λ , on aura d'après le texte :

$$\begin{aligned} r &= R (1 - \alpha \sin^2 \lambda), \\ c &= C (1 + 3 \alpha \sin^2 \lambda), \\ p &= P [1 + (\frac{2}{3} q - \alpha) \sin^2 \lambda], \\ l &= L [1 + (\frac{2}{3} q - \alpha) \sin^2 \lambda]. \end{aligned}$$

l'on a obtenus par ces deux moyens; nous dirons seulement ici que la mesure directe des degrés, et les variations de la pesanteur, se réunissent pour donner à la terre une figure qui s'accorde avec celle que la théorie lui assigne, dans les limites des erreurs qu'on peut justement attribuer aux irrégularités dont la surface de la terre est affectée, ou qui ont pu s'introduire à l'origine dans la disposition de ses éléments. En effet, la détermination de la figure de la terre par la théorie suppose qu'elle a exactement conservé la forme qu'elle aurait prise étant fluide pour arriver à l'état d'équilibre; or, les hautes montagnes dont sa surface est hérissée, la densité si diverse des éléments qui s'y rencontrent, nous montrent assez que cette supposition s'écarte beaucoup de la réalité. Sans doute des anomalies non moins grandes existent dans les couches intérieures, et l'on peut attribuer à ces causes sans cesse entretenues par les tremblements de terre, par les éruptions volcaniques, par les commotions de toute nature enfin qui agitent encore l'intérieur du globe, et que les phénomènes qui se passent à sa surface nous révèlent, les légères différences que présentent, relativement à sa figure, les résultats de l'observation et ceux de la théorie.

217. Nous venons de voir que la figure elliptique satisfait aux conditions de l'équilibre d'une masse fluide douée d'un mouvement de rotation, soit dans le cas de l'homogénéité, soit dans le cas plus étendu d'un fluide composé de couches hétérogènes dont la densité croît de la surface au centre. Mais la figure elliptique est-elle la seule avec laquelle l'équilibre soit possible, ou, en d'autres termes, ne se pourrait-il pas que les corps célestes, en

vertu des forces qui les animaient à l'origine du mouvement, eussent pris, pour arriver à l'état de fixité où ils sont aujourd'hui, des figures très-différentes de celles que la théorie précédente leur suppose? Cette question, dans toute sa généralité, surpasse les forces de l'analyse, et jusqu'ici elle n'est parvenue à y répondre qu'en la limitant au cas particulier où l'on suppose la figure primitive de la masse fluide que l'on considère, peu différente de celle de la sphère, et la force centrifuge qui résulte du mouvement de rotation peu considérable. On démontre alors, par la méthode des développements en séries, que, quelles que soient les densités des différentes couches du fluide, pourvu que leur aplatissement soit très-petit, la masse fluide prend, dans ce cas, la figure d'un ellipsoïde de révolution; l'ellipticité de ces différentes couches diminue tandis que leur densité va en croissant, de la surface au centre. Or, l'hypothèse sur laquelle ce résultat est appuyé, est conforme à la nature des corps célestes, puisqu'ils s'écartent en général très-peu de la forme sphérique, et qu'il est permis de présumer que leurs éléments, en se rapprochant par la condensation, ont conservé entre eux la même disposition qu'ils avaient à l'état fluide. Tous les résultats que nous venons de déduire des lois de la mécanique relativement à la figure d'équilibre d'une masse fluide douée d'un mouvement de rotation, et à la loi de la pesanteur à sa surface, peuvent donc être regardés comme immédiatement applicables aux corps du système planétaire, en supposant à leurs molécules un état de fluidité parfaite à l'origine du mouvement.

218. Le système de l'attraction nous fournit des notions

précises non seulement sur la figure de la terre, c'est-à-dire sur l'arrangement mutuel des éléments qui la composent, mais encore sur leur nature intime. Le rapport de la masse de la terre à son volume nous a fait connaître sa densité relative à celle du soleil, n° 183, mais jusqu'ici nous n'avons eu aucun moyen de déterminer sa densité absolue, c'est-à-dire le rapport de sa densité moyenne comparée à celle d'une substance de sa surface qui nous soit connue. Pour la mesurer, on s'est servi de l'attraction qu'une montagne, supposée d'une masse très-considérable, peut exercer sur les corps qui sont placés dans son voisinage. En effet, les montagnes qui couvrent la surface de la terre sont toutes très-petites, il est vrai, relativement à sa masse entière; mais comme nous pouvons approcher aussi près que nous le voulons de leur centre d'action, il en résulte que cette action peut se manifester dans les phénomènes relatifs à la pesanteur. Ainsi, par exemple, le prolongement du fil à plomb dans le voisinage d'une montagne, n'ira pas rencontrer le ciel au zénith de l'observateur; il s'en écartera en sens opposé des deux côtés de la montagne, en sorte que si tout est semblable de part et d'autre, soit relativement à l'éloignement de l'observateur, soit relativement à la forme de la montagne, la distance angulaire des deux étoiles où aboutira le fil à plomb sera augmentée du double de la déviation. Cet effet sans doute sera très-peu considérable à cause de la faible étendue des montagnes relativement à la masse entière de la terre, mais la précision des observations modernes suffit pour le rendre sensible. Lorsque l'angle de déviation est ainsi déterminé, les principes de la mécanique fournissent une

formule très-simple qui donne le rapport de la densité de la masse attirante à celle de la terre d'après celui de leurs dimensions respectives, on peut donc en conclure la densité moyenne de la terre comparée à la densité moyenne des matières dont la montagne est composée. C'est par une suite d'observations de ce genre que Bouguer, dans le voyage qu'il fit au Pérou pour mesurer la longueur du degré sous l'équateur, détermina l'attraction d'une montagne très-élevée, et trouva que l'effet qui en résultait sur la déviation du fil à plomb surpassait 6". Maskeline a renouvelé cette expérience sur les montagnes d'Écosse, et il en conclut que la moyenne densité de la terre était à peu près double de celle de la montagne, et égale à environ quatre ou cinq fois celle de l'eau.

On voit que cette manière de déterminer la densité de la terre suppose que l'on connaît avec exactitude celle de la montagne sur laquelle on fait l'expérience. Cavendish s'est servi d'un autre procédé pour l'obtenir. Il l'a déduite de l'attraction qu'exerce une sphère métallique dont la nature et les dimensions sont données, sur les objets extérieurs; attraction qu'il est parvenu à rendre sensible à l'aide d'un instrument dont on se sert en physique pour mesurer les forces très-petites et qu'on appelle *balance de torsion*. On conclut de là le rapport de la force d'attraction de la sphère à la pesanteur, et par suite le rapport de la masse de cette sphère à celle de la terre. D'après cette expérience, la densité moyenne de la terre serait à celle de l'eau à peu près comme 11 est à 2, ce qui s'accorde avec la valeur précédente aussi bien qu'on peut l'espérer d'expériences aussi délicates. Nous

verrons en parlant du flux et du reflux de l'Océan, que la stabilité de la mer exige que la densité moyenne de la terre surpasse celle de l'eau; si cette condition n'était pas remplie, si la mer, par exemple, était formée d'une couche de mercure, l'action du soleil et de la lune au lieu d'oscillations périodiques, y produirait un mouvement progressif qui la ferait sortir de son lit pour se répandre sur les continents. Les notions que nous avons acquises sur la densité moyenne de la terre doivent donc nous rassurer entièrement à cet égard.

Nous avons vu que les variations de la pesanteur à la surface de la terre supposée elliptique, sont proportionnelles au carré du cosinus de la latitude; c'est à l'aide des observations du pendule que l'on détermine l'intensité de la pesanteur en chaque lieu du globe; mais si l'observation est faite dans le voisinage de quelques grandes chaînes de montagnes, comme près des Alpes ou des Cordilières, par exemple, il en pourra résulter des irrégularités dans la loi de la variation de la pesanteur, et la terre semblera s'écarter sensiblement de la figure elliptique dans une étendue de terrain plus ou moins considérable. Il en serait de même si, par quelque cause fortuite, la densité du terrain, dans le lieu où se fait l'observation, différait beaucoup de la densité générale de la surface terrestre; la pesanteur en serait augmentée ou diminuée plus qu'elle ne devrait l'être dans l'hypothèse d'une parfaite régularité dans la nature du sol. Il est donc nécessaire, lorsqu'on emploie les observations du pendule à la détermination de la figure de la terre, de mettre le plus grand soin à éviter les deux causes d'anomalie que nous venons de signaler.

219. Jupiter est la seule des planètes dont l'aplatissement ait pu être déterminé par l'observation avec quelque certitude; c'est même l'ellipticité sensible de cette planète qui donna aux astronomes la première idée de l'aplatissement de la terre. En supposant toutes les parties de Jupiter d'égale densité, on trouve que le rapport du diamètre de l'équateur à l'axe des pôles, serait égal à 1,10967; ce rapport, d'après les observations de Pound, serait 1,0771; Jupiter est donc moins aplati que dans le cas de l'homogénéité, il est donc composé de couches hétérogènes dont la densité va en augmentant, comme celle de la terre, de la surface au centre. L'aplatissement de Jupiter, d'après les observations, serait 0,07158 ou $\frac{1}{14}$, c'est-à-dire plus de vingt fois celui de la terre, conséquence nécessaire de ce que son mouvement de rotation est beaucoup plus rapide. Ainsi Jupiter s'écarte beaucoup plus que la terre de la figure de la sphère; en le supposant composé de couches homogènes dont la densité augmente de la surface au centre, son aplatissement doit être compris, n° 215, entre $\frac{5}{4}$ et $\frac{1}{7}$ du rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur de cette planète; on trouve que ce rapport est égal à $\frac{1}{7}$ à peu près, ce qui donne $\frac{5}{14}$ et $\frac{1}{14}$ pour les limites de l'aplatissement, la fraction $\frac{1}{14}$ tombe entre ces deux quantités; l'aplatissement de Jupiter est donc compris dans les limites que la théorie lui assigne.

Nous avons vu que, dans le cas de l'homogénéité, l'ellipticité de la terre serait de $\frac{1}{130}$ ou 0,004334; celle de Jupiter dans le même cas serait de 0,09883; en supposant donc que Jupiter et la terre soient de même densité, leurs aplatissements seront entre eux comme

0,09883 est à 0,004334. Si, d'après les observations, on fait l'aplatissement de Jupiter de $\frac{1}{14}$, on trouvera $\frac{1}{316}$ à peu près pour l'aplatissement de la terre, ce qui s'éloigne peu de la valeur $\frac{1}{303}$ qui est donnée par la mesure des degrés du méridien et par le concours des autres phénomènes. L'analogie que cet accord établit entre la figure de la terre et celle de Jupiter, montre avec évidence que la même loi a présidé à la formation de tous les corps célestes.

Dans le chapitre suivant, nous comparerons la figure de la terre, telle qu'elle résulterait de la théorie précédente, à celle qu'on déduit des observations directes faites à sa surface. Les autres planètes sont trop éloignées, et leur aplatissement est trop peu sensible pour que l'observation ait pu jusqu'ici fournir les données nécessaires pour établir par rapport à elles une comparaison semblable. Il en est de même de la lune, qui se présente à l'observateur comme un corps à peu près sphérique, les conséquences qui résultent des lois de sa libration sont les seules données que nous ayons sur sa véritable figure.

CHAPITRE IX.

FIGURE DE LA TERRE.

Moyen de la déterminer par la mesure des degrés du méridien. — Inégalités des degrés mesurés à différentes latitudes. — L'accroissement des degrés de l'équateur au pôle démontre l'aplatissement de la terre dans le sens de l'axe des pôles. — Détermination de cet aplatissement, 1° par la mesure des degrés du méridien; 2° par les variations de la longueur du pendule. — Du mètre et du nouveau système de poids et mesures. — Constitution physique du globe, état thermométrique, formation des montagnes, etc.

220. Sans doute, l'un des premiers objets qui attirèrent l'attention des hommes fut la détermination de la figure et de la grandeur du globe qu'ils habitaient. Avertis par leur propre expérience, et par les récits des voyageurs, que la terre n'était pas une surface plane, ils supposèrent qu'elle avait la forme d'un globe parfaitement sphérique, probablement parce que de toutes les surfaces courbes la sphère est celle dont la perception nous est la plus facile, et que nous sommes toujours portés à attribuer aux œuvres de la nature cette simplicité qui séduit la faiblesse de notre intelligence. La sphéricité

du globe semblait d'ailleurs clairement indiquée par le phénomène des éclipses de lune, où l'on voit la terre projeter sur le disque lunaire une ombre sensiblement circulaire; enfin cette hypothèse, si c'en est une, ne s'écarte évidemment que d'une très-petite quantité de la réalité.

En admettant donc avec les anciens astronomes la parfaite sphéricité de la terre, il suffira de connaître à sa surface la longueur d'un degré mesuré sur un arc de grand cercle, pour avoir, en le multipliant par 360° , la grandeur totale du méridien terrestre. On en déduira ensuite, par le rapport connu de la circonférence au diamètre, la grandeur du rayon terrestre, quantité qu'il est si nécessaire de connaître avec précision dans les recherches astronomiques, et qui entre comme une donnée indispensable dans le calcul des parallaxes.

Cette manière de déterminer la figure de la terre par des mesures directes prises à sa surface, est sans doute la plus simple que l'on puisse imaginer; aussi voyons-nous que c'est celle qui se présenta à l'esprit des premiers astronomes, et leurs méthodes pour la mettre en pratique sont encore à peu près les mêmes que celles que l'on suit aujourd'hui, nous avons seulement ajouté à la précision des résultats par le perfectionnement des moyens d'observations, et par les soins donnés à tous les détails de l'opération; elle peut se diviser en deux parties principales, 1^o la mesure de l'arc céleste qui répond à deux lieux de la terre situés sur le même méridien; 2^o la mesure de la distance terrestre comprise entre ces deux points.

221. On détermine l'arc céleste en observant simultanément

ment dans les deux lieux les hauteurs méridiennes de la même étoile, la différence de ces deux hauteurs donne le nombre de degrés, minutes et secondes que renferme l'arc compris sur la sphère céleste entre les zéniths des deux points d'observation. Soit S (*fig. 100*) un astre assez éloigné pour que les rayons visuels dirigés vers lui soient sensiblement parallèles, SAz et SBz' seront les distances zénithales, et leurs compléments les hauteurs méridiennes de cet astre, par rapport aux deux points A et B situés sur le même méridien; la différence de ces angles est égale à zCz', ou à l'angle que forment entre elles les verticales qui répondent à ces points. Les observations qui servent à fixer cet angle doivent être faites avec les soins les plus minutieux, parce qu'une erreur de 1" de degré dans l'arc céleste en produirait une de 16 toises environ sur la mesure de l'arc terrestre qui lui correspond; il suffirait donc de quelques secondes d'erreur sur cet arc pour conduire à un résultat tout à fait défectueux. Malgré tous les perfectionnements que l'expérience a successivement introduits dans l'art d'observer, malgré le secours des meilleurs instruments, l'observateur le plus exercé ne peut guère répondre encore, à deux ou trois secondes près, de la précision de ses résultats; on conçoit, par conséquent, combien la mesure d'un arc du méridien terrestre, qui paraît si simple au premier aperçu, a dû coûter de soins et de travaux aux astronomes; aussi n'est-ce qu'en vérifiant successivement les opérations de leurs devanciers, et en étendant assez les arcs mesurés pour que les petites erreurs des observations astronomiques devinssent moins sensibles en se divisant sur un plus grand espace, qu'après un

siècle de travaux assidus, ils ont pu se flatter d'y être à peu près parvenus.

222. La mesure de l'arc terrestre offre des difficultés d'un autre genre, à cause des obstacles de toute nature qui doivent se rencontrer dans un intervalle aussi considérable que celui qu'on est obligé d'embrasser pour diminuer, autant que possible, les erreurs dont est susceptible la mesure de l'arc céleste. L'opération serait même tout à fait impossible à exécuter, si l'on voulait mesurer la distance des deux stations extrêmes directement, c'est-à-dire à l'aide de perches juxtaposées à la suite les unes des autres, selon la méthode ordinaire des arpenteurs; mais on obtient cette mesure d'une manière très-exacte par des moyens indirects. Pour cela on lie les deux extrémités de l'arc qu'on veut déterminer, par une chaîne de triangles dont on observe avec soin tous les angles à l'aide du *cercle répétiteur de Borda* (1); il suffit en-

(1) Cet ingénieux instrument est destiné à donner les distances angulaires qu'on veut observer sur la terre ou dans le ciel, avec une précision égale à celle qu'on pourrait attendre d'un instrument construit sur de beaucoup plus grandes dimensions. Son but est de diminuer l'inexactitude de l'instrument en la faisant porter sur un angle double, triple, quadruple, etc., de l'angle que l'on veut mesurer; cet angle s'obtient en prenant la moitié, le tiers ou le quart de celui que l'instrument indique; en sorte que si l'erreur résultant de l'inexactitude de la division était de $1''$ de degré, par exemple, sur l'arc entier, elle se trouve réduite à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$ de seconde sur l'arc cherché.

Pour en donner une idée, concevons un cercle gradué sur lequel est fixée une lunette AB (fig. 101), qui tourne autour du centre C, et supposons ce cercle porté par un axe vertical ZCD, autour duquel il peut tourner. Dirigeons la lunette vers une étoile E que nous regarderons comme immobile pendant tout le temps de l'observation, l'angle ZCE sera la distance de l'étoile au zénith. Fixons la lunette

suite de connaître un côté d'un seul de ces triangles, pour pouvoir calculer tous les autres par les formules de la trigonométrie. Lorsque la chaîne de triangles est ainsi formée et qu'on les a tous rapportés au plan horizontal, on joint par une droite les deux points extrêmes, et l'on calcule les parties de cette droite comprise dans chacun des triangles; la somme de ces parties donne la longueur totale de l'arc terrestre qu'on s'est proposé de déterminer.

Soit, par exemple, A et B (*fig. 102*) les deux points dont on veut mesurer la distance, on commencera en partant du point A par former le triangle AMN en joi-

dans cette position au moyen d'une vis de pression qui la serre contre le limbe, et donnons à l'instrument un mouvement de rotation de 180° autour de son axe, la lunette prendra la direction CI, et l'étoile étant demeurée dans la direction CE, l'angle ECI sera le double de sa distance zénithale; si par conséquent vous faites tourner la lunette sans faire mouvoir l'instrument, de manière à la ramener dans la direction CE, l'arc VE qu'elle aura parcouru sur le limbe, vous donnera le double de celui que vous vouliez mesurer.

La lunette étant fixée dans cette position, donnez de nouveau un mouvement de rotation de 180° à l'instrument, la lunette reviendra en CV; pour la ramener sur l'étoile faites tourner le cercle autour de son centre C, sans toucher à la lunette, jusqu'à ce que l'étoile E entre dans la lunette; les choses se retrouvant dans la même situation qu'au commencement de l'observation, la lunette ayant la direction CE, donnez à l'instrument un mouvement de rotation de 180° autour de son axe ZC, la lunette reprendra la direction CI, ramenez-la sur l'étoile en la faisant tourner autour du centre C, le mouvement total de la lunette indiqué sur le limbe vous donnera le quadruple de l'angle cherché; vous pourriez obtenir de la même manière l'angle sextuple, octuple, décuple, etc. En divisant ensuite l'arc total par le nombre des observations, vous aurez l'angle simple avec une précision qui croîtra proportionnellement à ce nombre, et telle qu'on pourrait l'espérer d'un instrument d'un rayon, autant de fois plus grand qu'il y a d'observations.

gnant trois points remarquables sur le terrain; à l'aide du cercle répétiteur on mesurera les angles de ce triangle, ainsi que les hauteurs des trois points A, M, N, pour les pouvoir réduire à l'horizon; ensuite sur le côté MN on formera un nouveau triangle MNO, et l'on continuera de même un réseau de triangle jusqu'au point B. La longueur d'un seul côté dans cette suite de triangles étant connue, on pourra facilement calculer tous les autres. On joindra ensuite les points extrêmes A et B, et l'on déterminera chacune des parties de la ligne AB comprise dans les différents triangles en tenant compte de la courbure de l'arc AB, si cet arc est de quelque étendue. La somme de toutes ces parties sera la longueur totale de la distance cherchée.

Le succès de l'opération dépend surtout de la mesure exacte du côté sur lequel repose le calcul de tous les triangles et que, par cette raison, on nomme la *base*. Elle doit être de quelque étendue, comprise dans un terrain le plus dégagé possible d'inégalités et d'obstacles naturels; on la suppose ordinairement de 1,200 à 1,400 mètres, et elle doit être mesurée avec une précision rigoureuse, parce qu'une légère erreur dans la mesure de la base aurait une influence considérable sur tout le reste du calcul. Pour vérifier l'opération, on peut mesurer le côté d'un second triangle choisi soit à l'extrémité de l'arc opposée à celle que l'on a prise pour point de départ, soit dans un lieu intermédiaire, la longueur de ce côté donnée par une mesure directe doit s'accorder exactement avec celle que l'on a déduite du calcul, si la base primitive a été bien déterminée et si les angles ont été observés avec précision.

223. C'est par des procédés analogues à ceux que nous venons de décrire, que les astronomes, tant anciens que modernes, ont cherché, à diverses époques, à mesurer en différents lieux du globe la grandeur des degrés du méridien terrestre. Sans doute il faut reporter aux temps les plus reculés ces tentatives faites pour déterminer les dimensions de la terre. En effet, le rapport remarquable qu'on observe entre plusieurs mesures adoptées dans l'ancienne Égypte et dans l'Inde avec la longueur de la circonférence terrestre, semble prouver que non-seulement elle a été exactement connue de la plus haute antiquité, mais qu'elle avait même servi de base à un système de mesures semblable à celui qui est aujourd'hui établi en France. Mais le temps a effacé les traces de ces premiers travaux, s'ils ont existé; quant à ceux d'une date plus récente et dont les résultats nous ont été transmis par les astronomes de l'école d'Alexandrie, l'incertitude où nous sommes sur la grandeur des mesures qui leur servaient de termes de comparaison, ne nous permet pas d'en apprécier rigoureusement l'exactitude; d'ailleurs leurs moyens d'observations étaient trop imparfaits pour suffire à des opérations aussi délicates que celles qu'exige la mesure de la terre, et ce n'est guère que vers la fin du xvii^e siècle que les progrès de l'astronomie pratique et le perfectionnement des instruments ont enfin permis d'employer à cette détermination des procédés assez sûrs pour qu'on pût avoir quelque confiance dans leurs résultats.

Picard, en 1672, mesura la distance comprise entre Paris et Amiens, et l'arc céleste qui lui correspond, pour en déduire la longueur du degré du méridien terrestre.

Il trouva de cette manière le degré de France, à la latitude moyenne entre Paris et Amiens, de 57,060 toises. L'arc qu'il avait mesuré fut continué au nord jusqu'à Dunkerque, par Labire, et au midi jusqu'à Perpignan, par Cassini. On trouva par le premier intervalle le degré de 56,960 toises, et par le second de 57,098 toises. Ainsi donc, les différents degrés mesurés en France ne se trouvèrent pas de même longueur, ce qui semblait indiquer, conformément aux déductions que Newton et Huygens avaient déjà tirées de la théorie, et au phénomène des variations observées par Richer dans l'intensité de la pesanteur en allant des pôles à l'équateur, n° 70, que la terre s'écartait sensiblement de la figure de la sphère qu'à l'exemple des anciens astronomes on lui avait jusque là supposée.

224. En effet, si la terre était parfaitement sphérique, l'intersection de sa surface, par le plan méridien, serait un cercle; l'observateur qui marcherait de l'équateur au pôle devrait donc parcourir des intervalles égaux pour voir la hauteur de la même étoile augmenter successivement d'un degré, et comme l'observation montre que cela n'a pas lieu dans la nature, on en dut conclure que le méridien terrestre n'est pas circulaire. D'après cela, la plus simple des figures qu'on pouvait lui attribuer étant la figure elliptique, on supposa la terre engendrée par la révolution d'une ellipse tournant autour de l'axe des pôles, en sorte que l'équateur et les parallèles continuèrent à demeurer circulaires, et il ne resta plus qu'à déterminer le rapport de l'axe des pôles au diamètre de l'équateur, pour connaître dans cette nouvelle hypothèse la figure du sphéroïde terrestre.

Pour déduire ce rapport des mesures directes prises à la surface de la terre, observons que du moment que le méridien n'est pas circulaire, les degrés, comme on vient de le voir, doivent varier de longueur suivant les différentes latitudes des lieux d'observation; mais dans quel sens les degrés doivent-ils croître ou diminuer entre l'équateur et les pôles dans l'hypothèse elliptique? Quelle que soit la figure de la terre, moins la courbure d'un arc du méridien compris entre deux parallèles sera grande, ou plus cet arc se rapprochera de la ligne droite, plus on sera obligé de faire de chemin dans la direction du méridien pour que la hauteur de la même étoile augmente ou diminue d'un degré. Or, si l'on suppose que la terre à son état primitif était fluide, nous avons vu, n° 215, que, par l'effet de son mouvement de rotation, elle a dû s'aplatir dans le sens des pôles et se renfler à l'équateur, comme ferait un sphéroïde composé d'une substance aisément malléable, et qu'une force extérieure viendrait à comprimer dans le sens d'un de ses diamètres. Par l'effet de cette compression la courbure du méridien terrestre, supposé d'abord circulaire, a dû diminuer vers les pôles, tandis qu'elle a augmenté vers l'équateur; les degrés doivent donc être plus longs aux pôles qu'ils ne l'étaient dans l'hypothèse de la figure sphérique, tandis qu'ils doivent paraître plus courts lorsqu'on les mesure vers l'équateur. L'analyse mathématique fournit d'ailleurs une démonstration rigoureuse de cette proposition (1), et l'on est ainsi conduit à cette conclusion : *les degrés doivent aller en augmentant de l'équateur aux pôles, si la*

(1) Voir les notes.

terre est un ellipsoïde aplati dans le sens des pôles, ils doivent aller en diminuant dans le cas contraire.

225. Or, les trois premiers degrés mesurés en France par Picard, Lahire et Cassini, semblaient indiquer une diminution dans la longueur du degré en s'avancant du midi au nord, ce qui ne pouvait se concilier avec la figure que la théorie donnait à la terre. Mais on observa avec raison que des degrés contigus, mesurés sur un arc de méridien d'une aussi petite étendue, étaient insuffisants pour la déterminer; que l'anomalie qu'on remarquait dans la grandeur de ces degrés pouvait provenir ou des erreurs inévitables des observations, ou de quelques circonstances locales; et qu'enfin la loi des variations se manifesterait d'une manière bien plus évidente en mesurant des degrés séparés par de grands intervalles, et choisis aux latitudes même où leurs différences devaient être le plus sensibles, c'est-à-dire sous l'équateur et vers les pôles. Bouguer, Lacondamine, Godin, furent envoyés à Quito, et Maupertuis, Clairaut, Camus et Le Monnier allèrent en Laponie mesurer un degré du méridien à la plus grande latitude qu'il serait possible d'atteindre. Pendant ce temps Lacaille fut chargé de vérifier les degrés de France avec tous les moyens de précision que les progrès de l'astronomie avaient introduits depuis leur première mesure dans les observations. Ces voyages lointains, ces travaux persévérants entrepris dans un but purement scientifique, feront un éternel honneur à l'Académie des sciences de Paris qui les ordonna, et aux illustres savants qui consacrèrent plusieurs années de leur vie à leur exécution.

Lacaille rectifia d'abord le degré mesuré par Picard

qu'il trouva de 57069 toises au lieu de 57060, comme cet astronome l'avait supposé. Toutes les opérations de Lacaille concoururent ensuite à démontrer que les degrés de France allaient généralement en augmentant du midi au nord, et que si quelques degrés s'écartaient de cette loi, les différences étaient extrêmement petites et pouvaient être entièrement attribuées aux erreurs inévitables des observations. Ainsi disparut d'abord la plus grave objection qui se fût élevée contre l'hypothèse de l'aplatissement de la terre dans le sens de ses pôles, suivant la loi newtonienne.

Les résultats des observations faites au Pérou et à Tornéa, en Laponie, dissipèrent bientôt d'ailleurs tous les doutes qui pouvaient rester encore à cet égard; en effet, en les rapprochant on trouvait :

Degré sous l'équateur. . . .	56753 toises.
Degré moyen de France. . .	57023.
Degré sous le cercle polaire.	57419.

Le degré du pôle était donc de 666 toises plus grand que celui de l'équateur, et le degré de France tenait le milieu entre eux, comme cela devait être. Ainsi donc, d'après les mesures prises à sa surface, comme d'après les indications de la théorie, *la terre a la figure d'un sphéroïde aplati vers les pôles et renflé à l'équateur.*

226. Ce point une fois établi d'une manière incontestable, il restait à déterminer la mesure de l'aplatissement. La géométrie donne une formule très-simple pour conclure cette quantité de la longueur des degrés mesurés à la surface du sphéroïde. Cette formule n'exige même que la connaissance de deux degrés quelconques du méridien,

en sorte que si l'on en a mesuré un plus grand nombre, on en tirera autant de valeurs particulières de l'aplatissement terrestre; si la terre est un sphéroïde parfaitement elliptique, ces valeurs devront toutes s'accorder entre elles, et s'il y a des différences sensibles, ce sera la preuve que l'accroissement des degrés n'est pas régulier, et que la figure de la terre est plus composée qu'on ne l'avait supposé. (Voir les notes.)

C'est en effet ce qui est arrivé, et la valeur de l'aplatissement a varié selon les degrés qu'on a employés pour le calculer (1); cependant comme ce n'est qu'à la dernière extrémité qu'on pourrait se décider à abandonner pour le sphéroïde terrestre, une figure aussi simple que l'ellipsoïde de révolution, et aussi conforme d'ailleurs; comme nous l'avons vu, aux lois de la mécanique, on a pensé avec raison qu'en faisant même abstraction des circonstances accidentelles qui peuvent influencer sur l'exactitude des observations, il serait possible que la terre, sans s'écarter sensiblement de la figure elliptique, fût sujette à des irrégularités qui nous paraissent considérables, mais qui sont effectivement très-légères comparativement à son volume. Ce n'est donc qu'en rassem-

(1) Les longueurs des degrés mesurés, aux mêmes latitudes, sur différents méridiens, souvent même ne se sont pas accordées. Ainsi, le degré d'Italie évalué par Bosovich à 56979^l, s'est trouvé de 70^l plus court que le degré de France, correspondant à la même latitude. Le degré mesuré par Lacaille au cap de Bonne-Espérance, dans l'hémisphère austral, s'est trouvé de 57037^l, c'est-à-dire à très-peu près égal au degré moyen de France, malgré la grande différence des latitudes, celle du cap étant de 33° 18' et celle du degré de France de 45° environ. Il semblerait résulter de là que non-seulement la surface de la terre est soumise à des irrégularités considérables, mais que les deux hémisphères terrestres ne sont pas même semblables.

blant un grand nombre de degrés mesurés à diverses latitudes et sur différents méridiens, et en les combinant entre eux de manière à en tirer un résultat moyen, qu'on a pu espérer d'en déduire le véritable aplatissement du globe terrestre, ou plutôt l'aplatissement de l'ellipsoïde qui approche le plus de se confondre avec lui.

De nouveaux degrés du méridien ont été mesurés dans diverses contrées, et en même temps on a vérifié ceux qui l'avaient été antérieurement. Pour arriver même à une connaissance plus complète de la figure de la terre et s'assurer qu'en effet cette figure est celle d'une surface de révolution, on a mesuré des degrés dans le sens des parallèles, comme on l'avait fait dans le sens du méridien. On peut dire que tous les gouvernements éclairés de l'Europe ont mis à encourager et à faciliter ces opérations une louable émulation; mais la France mérite encore d'être citée au premier rang pour le vaste développement qu'elle leur a donné, en mesurant l'arc entier compris entre Dunkerque et Formentera. C'est de cet arc qu'a été conclu le degré moyen de France, et si l'on se rappelle que les observations célestes ont d'autant moins d'influence sur les résultats que les arcs mesurés sont plus considérables, on comprendra que ce degré offre toutes les garanties d'exactitude désirables. Ce n'est même que lorsque les degrés déterminés dans les autres contrées du globe auront été conclus d'arcs semblables, qu'on pourra compter sur leurs valeurs et sur les conséquences qu'on en tirera relativement à la figure de la terre. En attendant, parmi les degrés mesurés jusqu'ici, nous choisirons, pour la déterminer, les quatre suivants qui nous ont paru dignes de confiance.

Degrés du méridien terrestre.

	LATITUDES.	LONGUEURS DES DEGRÉS.
A l'équateur.	1° 31' 0'',50 aust.	110382,1 ^{mét.}
Dans l'Inde.	13 6 31,01 boré.	110628,6
En France.	45 4 18,03	111131,2
En Suède.	66 20	111488,5 (1)

En combinant ces valeurs de manière à en déduire par une moyenne la figure la plus probable du sphéroïde terrestre, on a trouvé que dans l'hypothèse elliptique la longueur du degré sous l'équateur, ou à zéro degré de latitude, serait de 110378^m,54 et la longueur du degré au pôle de 111667^m,58. Cela posé, d'après les formules de la géométrie, on trouve qu'en supposant la terre un ellipsoïde de révolution, le rayon de l'équateur serait de 6377284^m et le rayon du pôle 6356641^m, d'où il est aisé de conclure $\frac{1}{304,6}$ pour son aplatissement (2). Nous avons

(1) Les académiciens français avaient fait ce degré de 57419^t, (p. 619), il a été de nouveau mesuré en 1802 par des astronomes suédois qui l'ont trouvé de 57202^t, la première mesure était donc trop longue de 217^t, ce qu'il faut attribuer à la petitesse de l'arc dont ce degré avait été déduit, et à l'influence qu'ont dans ce cas sur la précision de l'opération les erreurs des observations célestes.

(2) La variation des degrés des pôles à l'équateur, sur un sphéroïde elliptique, est proportionnelle au carré du cosinus de la latitude

vu que l'aplatissement de la terre, supposée originairement fluide, devait être compris entre les deux fractions $\frac{1}{334}$ et $\frac{1}{377}$, n° 215, nous verrons bientôt que, pour satisfaire au phénomène de la précession, cet aplatissement doit être compris entre $\frac{1}{379}$ et $\frac{1}{377}$, la valeur précédente tombe donc entre les limites que la théorie lui prescrit. L'aplatissement de la terre, indiqué par l'influence qu'il exerce sur les mouvements de la lune, est de $\frac{1}{365}$ à très-peu près, n° 200, cette valeur s'accorde, comme on voit, d'une manière admirable avec celle qui résulte des mesures directes prises à la surface de la terre.

227. Les astronomes modernes ont trouvé dans les variations de la pesanteur un moyen moins direct, mais très-ingénieux, pour déterminer la figure de la terre, moyen qui avait manqué aux anciens qui ne connaissaient pas ce phénomène. Si la terre est aplatie aux pôles, il est

n° 215. En nommant donc c la longueur du degré qui correspond à la latitude λ , on aura par ce qui précède :

$$c = 111667^m,58 + 1089^m,04 \cos^2 \lambda,$$

formule dans laquelle $111667^m,58$ représente la longueur du degré au pôle, et $1089^m,04$ l'excès de ce degré sur celui de l'équateur.

En calculant d'après cette formule les longueurs des degrés correspondants aux quatre latitudes rapportées dans le tableau précédent, on trouve que la plus grande des différences entre les degrés mesurés et les degrés calculés, ne s'élève pas à cinq mètres. Ces différences, il est vrai, devraient se réduire à zéro, si la terre était rigoureusement elliptique, mais quelque soin qu'on ait pris dans la mesure des arcs que nous avons choisis, il est bien difficile de ne pas rejeter d'aussi petites erreurs sur l'imperfection des observations. Les mesures directes des degrés du méridien, à diverses latitudes, concourent donc, aussi bien qu'on peut le désirer, à donner à la terre la figure d'un ellipsoïde de révolution, telle qu'elle résulte des lois de la théorie.

évident que la pesanteur doit être plus grande à ces deux points qu'à l'équateur, parce que l'intensité de cette force diminue à mesure que le corps sur lequel elle agit est plus éloigné du centre du globe. Ces variations doivent être d'autant plus considérables que la terre s'écarte davantage de la figure elliptique; il y a donc entre les deux phénomènes une relation nécessaire qu'il suffira de découvrir pour déduire des altérations de la pesanteur à la surface de la terre, mesurées au moyen du pendule, la valeur exacte de son aplatissement.

La théorie démontre, n° 215, que, sur un sphéroïde rigoureusement elliptique, la longueur du pendule qui bat les secondes, diminue des pôles à l'équateur proportionnellement au carré du cosinus de la latitude; pour vérifier l'exactitude de cette loi, relativement à la terre, nous choisirons les trois observations suivantes :

LIEUX DES OBSERVATIONS.	LATITUDES.	LONGUEURS DU PENDULE À SECONDES.	DIFFÉRENCES.
Pérou.	0° 0'	0 ^m ,990364	0,0003503
Paris.	48 50	0 ,995867	0, 001458
Laponie.	67 4	0 ,995325	

Les différences, calculées d'après la loi de la proportionnalité aux carrés des cosinus des latitudes, seraient 0^m,003198, 0^m,001587, quantités qui s'éloignent assez

peu des résultats du tableau précédent, pour qu'on puisse attribuer ces légers écarts aux erreurs des observations, et considérer, par conséquent, la loi des diminutions du pendule, des pôles à l'équateur, proportionnelles au carré des cosinus des latitudes, comme exactement observée.

Ainsi donc, les variations de la pesanteur, à la surface de la terre, sont ce qu'elles devraient être, si sa figure était exactement celle d'un ellipsoïde de révolution. En admettant cette hypothèse comme un résultat de l'observation, la théorie donne pour évaluer l'aplatissement du sphéroïde une formule qui ne renferme que deux indéterminées, savoir : les longueurs du pendule à secondes observées à deux latitudes connues. Comme nous avons plus d'observations qu'il ne nous en faut pour déterminer l'inconnue que nous cherchons, nous commencerons par les combiner entre elles, ainsi que nous l'avons fait pour les mesures des degrés du méridien, n° 226, de manière à en déduire les valeurs moyennes qui conviendraient le mieux à leur ensemble. J'ai trouvé de cette manière $0^m,990390$ pour la longueur du pendule à secondes sous l'équateur et $0^m,996233$ pour sa longueur aux pôles; d'après la théorie, n° 216, l'excès du second pendule sur le premier, pris pour unité, est égal à $\frac{2}{5}$ du rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur moins l'aplatissement du sphéroïde terrestre, d'où j'ai conclu $\frac{1}{334}$ pour la mesure de cet aplatissement (1). Cette valeur est plus petite que celle que donne la mesure directe des degrés du méridien, et s'accorde

(1) En nommant l la longueur du pendule à secondes correspondant à la latitude λ , et en supposant que la longueur du pendule

moins bien avec celle qui résulte de l'ensemble des autres phénomènes ; la même remarque s'applique à toutes les tentatives que l'on a faites pour déterminer de cette manière la figure de la terre , ce qui semblerait annoncer que les circonstances locales , telles que le voisinage des hautes montagnes , la nature du sol , selon que la densité du terrain , dans le lieu de l'observation , s'écarte plus ou moins de la densité moyenne de la terre , etc. , ont sur les oscillations du pendule une influence beaucoup plus sensible qu'elles n'en peuvent exercer sur les mesures des degrés du méridien.

228. En rassemblant les résultats précédents , on voit que les différents moyens que nous avons pour déterminer l'aplatissement du sphéroïde terrestre , savoir : les inégalités de la lune , la mesure des degrés du méridien , et les variations de l'intensité de la pesanteur à sa surface , s'accordent à donner à la terre la même figure elliptique , au moins dans les limites des erreurs qu'on doit attribuer soit à l'imperfection des observations , soit à des irrégularités qui peuvent exister en quelques points de la surface du globe sans affecter en rien l'ensemble de sa constitution générale. Cette liaison que la théorie de la pesanteur universelle a établie entre les

décroisse des pôles à l'équateur proportionnellement au carré du cosinus de la latitude , on aura :

$$l = 0^m,996233 - 0^m,005643 \cos.^2 \lambda.$$

L'excès du pendule au pôle , sur celui de l'équateur , pris pour unité , serait ainsi de $0^m,005697$; le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur est $\frac{1}{178}$, et cinq fois la moitié de ce rapport est égal à $0,00865$; d'après la théorie n° 216 , l'aplatissement de la terre doit être égal à cette quantité moins $0,005697$, ce qui donne $0,008650 - 0,005697 = 0,002953$ ou $\frac{1}{171}$ à peu près. (V. les notes.)

phénomènes les plus divers en apparence et qui a permis aux astronomes de les rapprocher pour déterminer quelques points délicats du système du monde, est sans contredit l'un des résultats les plus curieux et les plus utiles aux progrès de la science, qu'ait produits cette grande découverte.

La mesure de la terre intéresse non-seulement les astronomes comme un noble objet de curiosité, mais aussi parce que c'est elle qui leur sert de base pour l'appréciation de toutes les distances qu'ils observent dans les cieux. Ils ont donc dû apporter à cette mesure une attention proportionnée à son importance; d'après les observations rapportées page 622, voici quelles seraient, dans l'hypothèse de $\frac{1}{304.6}$ d'aplatissement, les dimensions de notre globe :

	EN MÈTRES.	EN LIEUES.
Rayon de l'équateur.	6377284	1455
Demi-axe du pôle.	6356641	1450
Rayon du parallèle dont le sinus de la latitude est $\frac{1}{2}$	6370559	1455
Aplatissement $\frac{1}{304.6}$	20645	4,644
Longueur de 1° moyen.	111124,15	25,002
Quart du méridien terrestre. . .	10001173,86	2250,27

La surface entière du globe terrestre est de 25,789,306 lieues carrées dont les trois quarts sont couverts par les

mers. Les montagnes qui hérissent sa surface sont toutes très-petites relativement à ses dimensions; en effet, la plus haute des montagnes de l'Europe, le Mont-Blanc, n'est élevée que de 4810 mètres au-dessus du niveau de la mer. Le Chimborazo, au Pérou, n'a que 6530 mètres de hauteur, et le point le plus élevé du globe que nous puissions atteindre, le 14^m pic de l'Himalaya au Thibet, ne dépasse pas 7821 mètres. Ce ne sont que de légères irrégularités sur une surface d'une si grande étendue, et on les a comparées, pour en donner une juste idée, aux aspérités qui couvrent la peau d'une orange.

229. Le principal objet que l'on s'était proposé dans les dernières opérations exécutées en France au commencement de ce siècle, pour la mesure des degrés du méridien, était de déterminer la base d'un système uniforme de poids et mesures. La commission chargée de s'en occuper reconnut la nécessité de rattacher cette base à un phénomène facile à retrouver dans tous les temps, à moins d'un bouleversement général dans la constitution du globe, et elle adopta pour l'unité fondamentale de toutes les mesures, la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre qu'on appela *mètre*. Pour en évaluer la longueur, on supposa la terre elliptique et l'on détermina son aplatissement en comparant le degré de France au degré de l'équateur, mesuré autrefois par Bouguer, n° 225. On trouva ainsi pour l'aplatissement du sphéroïde terrestre $\frac{1}{231}$, et pour la longueur moyenne des degrés du méridien sur cet ellipsoïde 57008,2222'; le quart du méridien contenant 90 degrés semblables, sa longueur totale est de 5130740 toises. En prenant donc la dix-millionième partie de ce nombre, on

aura 0,5130740 ou 443^{lis},296 pour la longueur du mètre (1).

Toutes les mesures de longueur, de capacité, de volumes et de poids dérivent du mètre en suivant l'ordre décimal, de sorte que la loi de formation et l'unité fondamentale étant connues, on peut aisément reconstruire tout le système. Cette application de la division décimale à notre système de poids et de mesures en facilitera extrêmement l'usage, et c'est une heureuse

(1) Dans l'impatience où l'on était de faire jouir la France des avantages du nouveau système métrique, on n'attendit point que la détermination du grand arc de méridien compris entre Dunkerque et Formentera fût achevée, et l'on se contenta de déduire le degré moyen de la portion de cet arc comprise entre Dunkerque et Montjouy. Cette opération ayant été terminée depuis, et continuée jusqu'à Greenwich, a donné pour la longueur de l'arc entier compris entre ces deux points 730532^l,8, d'après les corrections faites récemment par M. Puissant aux évaluations de Delambre. Cet arc total ayant une amplitude céleste de 12° 48' 43^{''},89 donne 57018^l,5 pour le degré moyen de France à la latitude de 45° 4' 18^{''},05. Delambre avait fait subir lui-même une légère correction au degré de l'équateur mesuré par Bouguer, qui fut ainsi réduit à 56737^l. Au moyen de ces deux degrés, on détermine l'aplatissement de la terre que l'on trouve de $\frac{1}{161}$, et le quart du méridien que l'on trouve égal à 5131658^l. La longueur du mètre serait ainsi de 0,5131658 ou de 443^l,375

La longueur légale du mètre est de . . . 443,296

Différence. . . 0,079

Cette différence tient à l'incertitude où nous sommes encore sur les vraies dimensions de la terre; elle indique l'un des plus graves inconvénients de la base que l'on a choisie pour notre nouveau système de poids et mesures, celui de la faire dépendre d'une quantité nécessairement variable à mesure que les bonnes observations se multiplieront. (Voir le Mémoire de M. Puissant, *Mémoires de l'Institut*, t. XVI.)

innovation qui doit trouver tôt ou tard des imitateurs chez tous les peuples éclairés.

La mesure itinéraire employée généralement dans les usages nautiques se nomme *lieue marine*. Elle forme la vingtième partie d'un degré du méridien terrestre, en supposant donc le degré moyen de 57008',22 la longueur de la lieue marine sera de 2850',41 ou 5555^m,55.

La lieue ordinaire ou de *vingt-cinq* au degré, employée dans les mesures géographiques, est la vingt-cinquième partie du même degré, elle contient par conséquent 2280',32 ou 4444^m,44.

L'aplatissement du sphéroïde terrestre est assez petit pour qu'on puisse tout à fait le négliger dans les usages ordinaires. On peut même, dans les voyages de long cours, considérer la terre comme sphérique et se contenter de tenir compte de l'inégalité des degrés mesurés dans le voisinage des pôles ou près de l'équateur. Ainsi, les différences entre deux hauteurs consécutives du soleil, observé chaque jour à midi, pourront être regardées comme les différences des latitudes terrestres, et en multipliant l'arc qui en résulte, exprimé en degrés et parties décimales du degré, par la longueur attribuée au degré du méridien à la latitude donnée, on aura la distance que le vaisseau a parcourue dans le sens des méridiens. Les erreurs qui résulteront de cette estime seront toujours moindres que celles que comportent les observations astronomiques faites sur mer, dans l'état d'imperfection où est encore à cet égard l'art de la navigation. Au reste, si le peu d'aplatissement de la terre permet de le négliger tout à fait dans les usages ordina-

res, il n'en était pas moins nécessaire de le déterminer avec exactitude, d'abord pour la précision de la mesure des distances célestes qui exige que nous connaissions aussi exactement que possible la base à laquelle nous les rapportons, et ensuite parce que la comparaison de la figure de la terre déduite de l'observation, à celle que lui assigne la théorie, est peut-être la preuve la plus évidente que nous puissions trouver à notre portée, de la grande loi de la pesanteur universelle.

230. Les notions que nous avons acquises sur la figure de la terre peuvent nous éclairer encore sur quelques questions relatives à sa constitution physique. En effet, nous venons de voir que tous les phénomènes observés à la surface de la terre concourent à prouver qu'elle a à très-peu près la forme qui convient à l'équilibre d'une masse fluide douée d'un mouvement de rotation. Il est difficile de croire qu'une pareille coïncidence soit due simplement au hasard, comme il faudrait le supposer, si la terre avait été déjà à l'état solide à l'origine du monde; n'est-il pas plus naturel de penser que les molécules de la terre ont été primitivement retenues à l'état fluide sous l'influence d'une haute température, et qu'alors son mouvement de rotation, combiné avec les attractions de toutes ses parties, a suffi pour lui donner la figure d'un ellipsoïde aplati vers les pôles, qu'elle a ensuite conservée en se refroidissant? En perdant successivement leur chaleur d'origine dispersée par le rayonnement dans les espaces célestes, les parties les moins volatiles se sont solidifiées les premières, et la terre est enfin arrivée, par des transitions successives, à former une surface régulière et solide, comme nous la voyons aujourd'hui.

Si la chaleur est en effet le principe qui, à l'origine des temps, tenait en dissolution les éléments constitutants de la terre, il serait possible que son intérieur conservât encore les traces de la chaleur primitive, qui a dû abandonner d'abord les couches les plus voisines de la surface. En effet, toutes les observations démontrent que la température augmente à mesure que l'on pénètre plus avant dans l'intérieur de la terre; cette augmentation est régulière et de 1° centigrade pour 32 mètres d'enfoncement; la température doit donc être énorme même à de médiocres profondeurs, et il est probable qu'à peu de distance de la surface les molécules terrestres sont encore à l'état de fluidité incandescente. La terre ne serait ainsi qu'une enveloppe solide qui recouvre des matières en ébullition, et c'est à cette chaleur d'origine qu'il faut attribuer les éruptions volcaniques, les tremblements de terre et l'existence des eaux thermales dont la température varie selon qu'elles viennent de différentes profondeurs.

Puisque tous les phénomènes prouvent que la terre n'est point encore arrivée à un état complet de refroidissement, l'on a pu craindre que la température de la surface du globe ne subît dans la suite des siècles des variations importantes par l'abaissement de la température des couches intérieures. Quelques philosophes du dernier siècle, Buffon, Bailly, etc., avaient donné à cette opinion un caractère vraiment inquiétant en évaluant pour la France la chaleur qui s'échappe de l'intérieur du globe à 9 fois en été et à 400 fois en hiver celle qui résulte de la seule action du soleil, en sorte que cet astre n'entrerait que pour une très-faible partie dans la

distribution de la chaleur à la surface de la terre. Mais heureusement ce résultat ne reposait que sur de fausses inductions, et l'illustre Fourier, dans sa théorie de la chaleur, a montré par des calculs positifs qu'il fallait réduire à $\frac{1}{50}$ de degré seulement l'excès de la température totale de la surface du globe sur celle qui résulte de l'action des rayons solaires. Ainsi donc, quelques modifications que la suite des temps puisse apporter dans la température des couches intérieures du globe, et quand bien même elles viendraient à perdre entièrement leur chaleur d'origine, la température de la surface qui peut seule avoir une influence directe sur notre existence, ne pourra varier que de *un trentième* de degré, c'est-à-dire d'une quantité absolument insignifiante.

Nous verrons dans le chapitre X que les observations astronomiques confirment d'une manière bien remarquable cet important résultat, en montrant que la température moyenne de la terre n'a pas varié de $\frac{1}{100}$ de degré depuis *deux mille ans*, ce qui doit nous rassurer sur les changements futurs qu'elle pourra éprouver.

Quant aux variations de la température du globe qui résulteraient des altérations que peuvent éprouver dans la suite des siècles la position et la figure de l'orbe solaire, nous avons déjà vu, chap. IV, que ces altérations étant périodiques et renfermées dans d'étroites limites, la situation du soleil par rapport à la terre sera à peu près la même dans tous les temps. Le périégée solaire pourra seul varier d'une manière considérable dans la suite des siècles; le soleil par ce déplacement se trouvera plus voisin de nous en été qu'en hiver, mais, d'autre part, son mouvement deviendra plus rapide à la première

époque qu'à la seconde, et le calcul montre que l'augmentation qui pourrait provenir de ce que l'astre s'est rapproché de nous pendant l'été et le printemps, est exactement compensée par la diminution de température qui résultera de ce que la durée de ces deux saisons sera devenue plus courte. Ainsi donc, les changements qui s'opèrent dans la position et la forme de l'orbe solaire ne peuvent avoir qu'une influence insensible sur la température moyenne de notre globe.

Les seules causes qui peuvent modifier les climats terrestres sont donc, ou des circonstances de localités ou quelque altération dans le pouvoir calorifique et lumineux du soleil. La dernière de ces deux causes peut être encore tout à fait écartée, parce qu'il résulte des recherches de tous les voyageurs et des géologues que la température n'a éprouvé aucune variation sensible dans les climats où les révolutions naturelles et les travaux des hommes n'ont point gravement altéré la nature du sol. Quant aux circonstances locales, telles que les défrichements, la disparition des grandes forêts dans certaines contrées, le dessèchement des marais, les digues opposées aux débordements de la mer ou des rivières, la création de nombreux canaux, elles ont pu changer d'une manière sensible le climat habituel de quelques régions, mais elles n'ont pu avoir qu'une influence bornée et partielle, et nous pouvons conclure de ce qui précède que, depuis les temps les plus reculés, la température moyenne du globe terrestre est toujours restée la même que nous la voyons aujourd'hui.

231. Revenons à la constitution physique de la terre, et cherchons à connaître par quelles transitions elle a dû

passer pour arriver à son état actuel. Si la terre a été originairement fluide, d'après les lois de l'équilibre des fluides, la densité de ses couches doit aller en augmentant de la surface au centre, c'est ce que paraissent confirmer toutes les observations faites dans l'intérieur des mines. Il n'est pas même nécessaire, pour que cette condition soit remplie, de supposer qu'à l'origine les molécules les plus denses se sont réunies autour du centre et que les parties les plus légères ont occupé les points voisins de la surface, à la manière des liquides pesants dans un vase en repos; les différentes couches pourront être composées des mêmes éléments, les pressions qu'elles supportent par le poids des couches supérieures et qui vont en augmentant en approchant du centre, auront suffi pour leur donner l'excès de densité nécessaire pour assurer leur équilibre.

L'hypothèse de la fluidité parfaite de la terre à l'origine du monde, qui explique si naturellement la loi générale de sa figure, peut encore expliquer d'une manière très-simple les inégalités accidentelles dont elle est couverte. En effet, c'est une opinion aujourd'hui généralement admise parmi les géologues que les montagnes se sont formées par voie de soulèvement; elles sont sorties du sein de la terre en perçant violemment son enveloppe solide. On explique ainsi d'une manière très-naturelle la présence des coquillages qu'on rencontre sur quelques hautes montagnes, sans être obligé de supposer que lorsque la mer les couvrait elles avaient déjà atteint leur élévation actuelle. On a été plus loin, en étudiant la nature des grandes chaînes de montagnes qui hérissent la surface de la terre, on a essayé de remonter aux diffé-

rentes époques de leur formation, et à défaut de leur âge absolu, de fixer au moins leur ancienneté relative. M. Élie de Beaumont, l'auteur de cette ingénieuse conception, en a déjà fait une heureuse application aux principales montagnes de l'Europe. Sans entrer sur ce sujet dans des développements que les bornes de cet ouvrage nous interdisent, nous dirons qu'on peut admettre comme une vérité désormais acquise à la science, que la formation des hautes montagnes qui couvrent le globe est postérieure à l'époque où la terre est passée, par le refroidissement, de l'état liquide à l'état solide. On peut donc supposer qu'à cette première époque la terre ne présentait qu'une surface unie et sans aucune aspérité remarquable. Mais les gaz et les substances de toute nature qui bouillonnaient encore dans son sein se sont enflammés, et, en cherchant à se répandre à l'extérieur, ils ont par un effort violent soulevé la croûte terrestre qui les comprimait. C'est ainsi que les montagnes sont sorties de la terre en s'élevant au-dessus de leur niveau primitif. Lorsque les feux souterrains sont parvenus de bonne heure à s'ouvrir un passage, ils se sont dissipés par les bouches volcaniques, qui, en cette occasion, ont rempli l'office des soupapes de sûreté dans nos machines à vapeur; le terrain alors a dû être soulevé à une médiocre hauteur; mais lorsque l'enveloppe terrestre a mieux résisté, le soulèvement a été beaucoup plus considérable, ce qui explique l'inégalité remarquée souvent entre des montagnes voisines et du même ordre de formation.

Les montagnes portent encore pour la plupart les traces incontestables des affreux bouleversements que la

nature a éprouvés en les enfantant; on peut donc en conclure que réciproquement elles sont les indices certains de ces bouleversements, et que toutes les fois que quelque commotion volcanique a agité l'intérieur du globe, il y a eu à l'extérieur formation de montagnes. Outre les exemples de pareils phénomènes qui se sont pour ainsi dire passés sous nos yeux, un fait que nous avons déjà eu l'occasion de citer peut encore servir à confirmer cette opinion, c'est le peu d'action que les montagnes exercent généralement sur les corps pesants comparativement à leur volume, ce qui prouve que leur densité est très-peu considérable. Ainsi, les observations de Bouguer, citées n° 218, ont montré que l'influence des hautes montagnes du Pérou sur les oscillations du pendule et sur la direction du fil à plomb n'est pas la *dixième* partie de celle qu'exerceraient des montagnes de même hauteur dont la densité égalerait la moyenne densité de la terre. Maskelyne est parvenu, relativement à une montagne d'Écosse, à un résultat semblable. Ces grands corps paraissent donc contenir très-peu de matière propre comparativement à leur volume, et cette conjecture est encore confirmée par la découverte que l'on a faite de profondes cavités dans l'intérieur de plusieurs d'entre eux. Or, si les chaînes de montagnes ont en effet été formées par le soulèvement de la surface de la terre et de ses premières couches déjà consolidées, il est naturel de supposer que leurs éléments disjoints par cette secousse violente, et mêlés d'ailleurs en grande partie à des substances volcaniques, n'ont plus la densité des couches terrestres qui se sont formées par le refroidissement graduel de la matière incandescente.

Concluons donc que si la terre paraît s'écarter en quelques points de la figure régulière que la théorie lui attribue, ces anomalies sont tout à fait insensibles relativement aux dimensions du globe, et s'expliquent d'ailleurs d'une manière très-vraisemblable dans l'hypothèse que les molécules terrestres étaient retenues originai-
ment à l'état fluide sous l'influence d'une haute température, et que la terre, en se refroidissant graduellement à sa surface, a conservé dans son sein une partie de sa chaleur primitive.

CHAPITRE X.

PRÉCESSION DES ÉQUINOXES, ET NUTATION DE L'AXE
TERRESTRE.

Cause qui produit la précession. — Cause qui produit la nutation. — Variation de l'obliquité de l'écliptique. — De la longueur de l'année tropique. — Masse de la lune. — Aplatissement de la terre. — Invariabilité de la vitesse de rotation de la terre et des pôles à sa surface. — Invariabilité du jour moyen solaire.

232. Les mouvements de translation des planètes autour du soleil sont indépendants de leur forme, ils sont les mêmes que si cette forme était parfaitement sphérique. Leurs mouvements de rotation, au contraire, sont intimement liés à la loi de leur figure par le grand principe de la gravitation universelle. En effet, si les corps célestes étaient des sphères homogènes ou composées de couches homogènes, ils tourneraient uniformément autour d'axes invariables, par la propriété qu'a la sphère d'attirer tous les corps et d'être attirée par eux comme si sa masse entière était réunie à son centre (1). Mais nous avons vu que la force centrifuge, due au mouvement de rotation des planètes, abaisse leur pôle et relève leur

(1) Voir la note page 523.

équateur. Les forces qui les animent ne se réunissant plus à leurs centres de gravité respectifs, les deux hémisphères n'éprouvent pas d'égales attractions, et il en résulte dans leurs pôles de rotation des déplacements, et dans leurs axes des balancements qui produisent pour la terre le phénomène de la *précession des équinoxes* et de la *nutation* de l'axe terrestre, et pour la lune le phénomène que les astronomes ont nommé *sa libration*.

Considérons d'abord les mouvements de l'axe terrestre. Supposons que sur l'axe des pôles on décrive une sphère, la terre se trouvera composée de cette sphère et d'un menisque qui la surmonte, l'épaisseur de ce menisque augmentant en avançant des pôles vers l'équateur. L'action du soleil sur la sphère étant la même de toutes parts, il n'en résulte aucun déplacement dans son équateur, on peut donc faire abstraction de cette partie du sphéroïde, et considérer la terre comme réduite au menisque qui l'enveloppe. Que l'on imagine ensuite les différents points de ce solide réunis autour de l'équateur et formant comme un anneau détaché du globe; si le mouvement du soleil avait lieu dans le plan de l'équateur, son action sur tous les points de cet anneau serait la même, il n'y aurait donc encore dans ce cas ni précession ni nutation; mais en vertu de l'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique, il y a toujours une moitié de l'anneau au-dessus de ce plan et une autre moitié au-dessous. L'attraction du soleil sur la première moitié tend à l'entraîner vers le plan de l'écliptique en l'abaissant; son attraction sur la seconde moitié tend à l'entraîner en le relevant, en sorte que, par ce double effet, l'équateur semble devoir pivoter autour de

son intersection avec le plan de l'écliptique pour se confondre avec lui ; et c'est ce qui arriverait en effet si la terre n'avait point de mouvement de rotation ; mais ce mouvement change considérablement les lois du phénomène. Les nœuds de l'équateur prennent sur l'écliptique un mouvement rétrograde, tandis que son inclinaison sur ce plan n'éprouve aucune variation sensible. Ainsi l'on peut dire qu'en se combinant avec l'action du soleil, la rotation de la terre transporte dans l'inclinaison l'invariabilité qui existait auparavant dans les nœuds, et réciproquement elle donne aux nœuds de l'équateur la mobilité qui existait dans son plan (1).

(1) On sait que d'Alembert, qui donna le premier une solution analytique de ce problème, l'un des plus difficiles de la mécanique céleste, avait d'abord fait abstraction du mouvement de rotation de la terre, imaginant qu'il devait être sans influence sur les phénomènes de la précession et de la nutation. En effet, lorsqu'on suppose la terre un sphéroïde de révolution, tous les méridiens étant semblables et se présentant successivement de la même manière au soleil et à la lune, il semble que l'action de ces astres sur l'axe terrestre doit être la même, soit que la terre tourne sur elle-même, soit qu'elle demeure immobile. Mais il n'en est pas ainsi, et c'est une preuve nouvelle des erreurs où peuvent conduire, dans la théorie compliquée des mouvements célestes, les raisonnements les plus exacts en apparence, lorsqu'ils ne sont pas vérifiés par l'analyse. D'Alembert arriva de cette manière à des résultats absolument contraires aux observations, et dans son désappointement, il livra, dit-on, au feu ce premier travail. Mais ayant ensuite repris la question en y faisant entrer en considération le mouvement de rotation de la terre, il parvint à des résultats différents de ceux qu'il avait d'abord obtenus, et qui lui donnèrent les vraies lois de la précession et de la nutation indiquées par l'observation*.

* Mécanique céleste, tome V, page 253.

Newton explique par un ingénieux rapprochement ce singulier résultat du mouvement diurne. Il regarde chaque particule de l'anneau *imaginaire* qui enveloppe l'équateur, comme un astre qui fait sa révolution autour de la terre en 24 heures, et de là il conclut que l'action du soleil sur chacun de ces astres, et par conséquent sur l'anneau entier, doit produire le même effet que celui qu'elle exerce sur la lune; c'est-à-dire qu'elle doit déplacer, par un mouvement dirigé contre l'ordre des signes, les nœuds de cet anneau sur l'écliptique, comme elle fait rétrograder les nœuds de l'orbé lunaire sur le même plan, n° 197. L'anneau entraîne la terre avec lui, à cause de l'adhérence du ménisque à la sphère qu'il recouvre; mais comme sa masse est extrêmement petite relativement à celle du globe entier, son mouvement doit en être très-retardé, et de là résulte dans les nœuds de l'équateur terrestre ou dans la ligne des équinoxes le mouvement rétrograde et très-lent que les observations indiquent.

233. Mais si l'on peut ainsi se former une première idée de la cause qui produit la précession des équinoxes, on ne saurait espérer d'arriver sans le secours du calcul à la connaissance de toutes les lois d'un phénomène aussi compliqué. L'analyse montre que la lune a comme le soleil une action sensible sur le ménisque de la terre, et qu'elle contribue avec lui au phénomène de la précession des équinoxes. Mais comme elle ne se meut pas, ainsi que cet astre, dans le plan de l'écliptique, son action produit en outre une petite variation dans l'inclinaison de l'équateur à l'écliptique, qui, par la seule attraction du soleil, demeurerait constante. Cette varia-

tion est périodique; elle reprend les mêmes valeurs après une révolution des nœuds de la lune; sa période est par conséquent d'environ dix-huit ans et demi. L'axe de la terre, qui suit les mouvements de l'équateur, auquel il est toujours perpendiculaire, est ainsi assujetti à un balancement alternatif, que Bradley avait reconnu par l'observation avant que la théorie n'en eût découvert la cause, et qu'il a nommé sa *nut*-*tation* (1), n° 25.

La *nut*-*tation* altère légèrement la précession qui aurait lieu sans elle; l'équinoxe *vrai* paraît osciller ainsi autour de l'équinoxe déterminé en faisant abstraction de la *nut*-*tation*, et qu'on appelle équinoxe *moyen*.

Les variations que la *nut*-*tation* introduit dans l'inclinaison de l'équateur à l'écliptique peuvent s'élever à $\pm 9'',25$ dans leur plus grande étendue, et, comme elles sont périodiques, elles n'altèrent pas l'inclinaison moyenne. Mais le plan de l'écliptique n'est pas fixe; en effet, nous avons vu n° 188 que l'action mutuelle des planètes fait varier lentement les inclinaisons de leurs orbites; elle change donc à la longue la position de l'orbe terrestre, et il en résulte une diminution séculaire dans l'obliquité de l'écliptique que les ob-

(1) Outre la *nut*-*tation* dont nous venons d'assigner la cause, l'axe terrestre est encore assujetti à deux petites *nut*-*tations* produites l'une par l'action du soleil, et dont la période est de six mois, l'autre par l'action de la lune, et dont la période est d'un demi-mois lunaire. Les deux inégalités qui en résultent s'ajoutent au terme principal de la *nut*-*tation*, pour former la *nut*-*tation* totale, qu'on nomme alors *nut*-*tation* *luni-solaire*; mais comme ces deux inégalités sont très-petites, on peut en général les négliger, et regarder, ainsi que nous le faisons ici, la *nut*-*tation* comme due uniquement à l'action de la lune.

servations anciennes comparées aux modernes rendent sensible.

Cette diminution était en 1800 de $48'',86$ par siècle, n° 39; elle ne forme pas par conséquent la centième partie de la précession, qui, dans cet intervalle, s'élèverait à $1^{\circ} 23' 42''$. Sa grandeur varie dans les différents siècles, mais elle n'est pas indéfinie, et elle est renfermée entre des limites qu'elle ne peut dépasser. La variation totale de l'obliquité qui résulterait de l'action des planètes serait de $\pm 4^{\circ} 53' 33''$; mais l'analyse montre qu'elle est considérablement modifiée par l'action du soleil et de la lune sur le sphéroïde terrestre, et l'étendue des variations qui peuvent résulter dans l'obliquité de l'écliptique de ces actions réunies, se réduit à $\pm 1^{\circ} 33' 45''$, c'est-à-dire au quart à peu près de la valeur qu'elle aurait si la terre était sphérique. Ainsi, comme nous l'avions annoncé n° 42, l'orbite terrestre ne fera que de légères oscillations autour d'une position moyenne dont elle s'écartera peu, et l'obliquité de l'écliptique, après avoir été en diminuant pendant un certain nombre de siècles comme elle le fait aujourd'hui, reviendra ensuite, en augmentant par les mêmes degrés, à sa première position, en sorte que l'équateur ne coïncidera jamais avec l'écliptique, ce qui produirait un bouleversement dans les saisons et dans les climats.

La même cause d'où résulte la variation de l'obliquité de l'écliptique par les déplacements de l'orbite terrestre, produit dans les équinoxes un mouvement direct de $0'',13295$ par an; l'action des planètes diminue donc d'une légère quantité l'étendue de la précession qui aurait lieu en vertu de l'action de la lune et du

soleil , et qui , sans cette circonstance , serait de $50''{,}357$ par an.

234. On a vu dans le chapitre III les effets qui résultent de la précession des équinoxes sur la position apparente des étoiles et sur l'aspect général du ciel. Le mouvement rétrograde de la ligne des équinoxes produit encore la différence de l'année tropique à l'année sidérale ; elle est égale , n° 40 , au temps que le soleil emploie à décrire l'arc de la précession annuelle ; mais comme cet arc n'est pas le même dans tous les siècles , ses variations changent la durée de l'année tropique : elle est aujourd'hui de $10''{,}28$ plus courte qu'au temps d'Hipparque , comme nous l'avons dit , n° cité ; l'année sidérale , au contraire , est rigoureusement invariable (1).

Bradley a trouvé que les effets qui résultent de la nutation pouvaient être représentés en supposant que le pôle vrai de l'équateur se meut autour du pôle moyen sur le contour d'une petite ellipse , dont les deux axes se déterminent en grandeur et en direction par la comparaison des observations (2). Nous avons vu , n° 66 ,

(1) Voir page 132.

(2) Le grand axe de cette ellipse, toujours compris dans un cercle de latitude, sous-tend un angle de $18''{,}852$, et son petit axe un angle de $14''{,}032$. Pour représenter le mouvement du pôle sur le contour de cette ellipse, on conçoit un cercle décrit du même centre avec son grand axe pour diamètre, et l'on imagine qu'un rayon de ce cercle le parcourt d'un mouvement rétrograde et uniforme pendant une période des nœuds de la lune, de manière qu'il coïncide avec la moitié du grand axe la plus voisine de l'écliptique, toutes les fois que le nœud moyen de l'orbite lunaire coïncide avec l'équinoxe du printemps. Enfin, de l'extrémité de ce rayon on abaisse une perpendiculaire sur le grand axe de cette ellipse, et le point où cette perpendiculaire rencontre sa circonférence est le vrai lieu du pôle terrestre.

que toutes les inégalités qui résultent de la précession dans la position des astres pouvaient être représentées par un mouvement conique de l'axe de la terre autour de l'axe de l'écliptique. En réunissant donc les deux phénomènes, on voit que l'on pourra représenter à la fois tous les effets de la *précession* et de la *nutation*, en supposant que le pôle terrestre se meut sur la circonférence d'une petite ellipse, dont le centre, que l'on peut considérer comme le lieu moyen du pôle, décrit uniformément un arc de $50', 224$ par an, sur la circonférence d'un petit cercle de $23-28'$ de rayon, tracé du pôle de l'écliptique comme centre et parallèlement à ce plan.

235. La nutation de l'axe terrestre étant due entièrement à l'action de la lune, tandis que la précession moyenne résulte de l'action combinée du même astre et du soleil, on peut, en comparant le rapport de ces deux quantités, données par l'observation, aux formules de la théorie, en déduire le rapport des masses du soleil et de la lune. On a trouvé ainsi en adoptant, d'après le docteur Brinkley, $9'', 25$ pour le coefficient de la nutation, que l'action de la lune sur le sphéroïde terrestre est à peu près triple de celle du soleil, et il en résulte $\frac{1}{75}$ pour le rapport de la masse de la lune à celle de la terre. Mais, comme l'a observé d'Alembert, un très-léger changement dans la valeur de la nutation suffit pour altérer considérablement ce rapport, et l'on a cherché, par cette raison, à le déduire plus sûrement d'autres phénomènes; c'est ce qu'on verra dans le chapitre où nous parlerons du phénomène des marées.

236. En comparant les formules de l'analyse aux résultats de l'observation, on en tire des données précieuses

sur la loi de variation de la densité et de l'ellipticité des couches de la terre, de sa surface au centre. La théorie montre d'abord que les phénomènes de la précession et de la nutation sont les mêmes que si la terre était un sphéroïde de révolution. En admettant cette supposition, on trouve que l'aplatissement du sphéroïde doit être compris entre les deux fractions $\frac{1}{31.9}$ et $\frac{1}{37.7}$. Nous avons vu n° 226 que la comparaison des degrés, mesurés à la surface de la terre, et les autres phénomènes d'où on le peut déduire, donnaient $\frac{1}{36.5}$ pour cet aplatissement; cette valeur est comprise par conséquent dans les limites que lui assigne le phénomène de la précession et de la nutation.

En introduisant ensuite cet aplatissement, comme une quantité connue, dans les formules de la théorie, on en déduit la loi de densité du sphéroïde terrestre. En le supposant composé de couches semblables, on trouve que cette densité va en croissant de la surface au centre, ce qui est conforme aux expériences de Cavendish, qui avait montré que cette densité augmente à mesure que l'on pénètre plus avant dans l'intérieur du globe, et aussi aux lois de l'hydrostatique, qui exigent que si la terre a été primitivement fluide, les parties les plus denses soient en même temps les plus voisines du centre.

237. Tels sont les principaux résultats que produit le mouvement de l'axe terrestre relativement aux étoiles; mais ce mouvement peut causer, dans la position des pôles à la surface de la terre, des variations qui ne sont pas moins importantes à examiner. En effet, si l'axe de rotation variait dans l'intérieur* du globe, chacun de ses mouvements déplacerait son équateur et altérerait

toutes les latitudes géographiques. Bien plus, les mers, troublées dans leur équilibre, suivraient les mouvements de l'équateur, et, descendant vers la partie de la terre qui s'est abaissée sous elles, laisseraient dans la partie opposée de nouvelles régions à découvrir. Les observations, il est vrai, n'ont pas indiqué jusqu'ici que l'axe terrestre fût soumis à aucune variation de cette nature; mais s'il était sujet à quelque inégalité à longue période, du genre de celles qui ne se développent que par la suite des siècles, les observations astronomiques, qui ne comportent encore qu'un assez court intervalle de temps, ne suffiraient pas pour nous rassurer sur les conséquences de ces variations, et ne sauraient rien nous apprendre sur leur marche. C'était donc à la théorie à éclairer cette importante question; or elle a montré que les mêmes forces qui, en déplaçant l'axe terrestre dans l'espace, produisent la précession et la nutation, ne peuvent nullement altérer sa position dans l'intérieur du globe, ni la vitesse de rotation de la terre autour de cet axe. Quant aux oscillations de l'axe terrestre qui peuvent résulter de l'ébranlement qu'il a reçu à l'origine du mouvement, elles sont depuis longtemps anéanties, et il ne subsiste plus que celles qui ont une cause permanente. Ainsi donc, dans tous les siècles, *la position des pôles et de l'équateur à la surface de la terre demeurera constamment la même, le mouvement de rotation sera uniforme, et la vitesse de ce mouvement n'éprouvera aucune altération appréciable.* C'est à M. Poisson que nous devons la démonstration complète de ces deux importants théorèmes (1).

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, tome VIII.

238. Le jour sidéral est l'intervalle écoulé entre deux retours consécutifs d'une étoile au même méridien; si la vitesse de rotation de la terre n'était pas invariable, la longueur du jour sidéral et celle du jour moyen solaire ne seraient plus les mêmes dans tous les siècles. La base qui nous sert à mesurer le temps se trouverait ainsi sensiblement altérée; il en résulterait, pour la fixation chronologique des événements historiques, des inconvénients du même genre que ceux que produirait l'usage d'un étalon inexact dans la mesure des distances terrestres. La même cause aurait des effets sensibles dans les habitudes même de la vie civile. Il était donc très-important de s'assurer de l'invariabilité du jour moyen solaire; l'analyse montre, il est vrai, que les déplacements de l'écliptique, combinés avec l'action de la lune et du soleil, introduisent dans son expression de légères variations; mais elle prouve en même temps qu'elles seront toujours insensibles.

Les observations anciennes comparées aux modernes confirment d'ailleurs cet important résultat. En effet, si la durée du jour moyen solaire n'était pas invariable, les durées des révolutions des corps célestes nous paraîtraient diminuer ou augmenter proportionnellement; et comme toutes les tables astronomiques sont calculées dans l'hypothèse d'un jour moyen constant, les longitudes et les latitudes des astres qu'on en conclurait ne seraient plus d'accord avec celles qu'on aurait déduites de l'observation directe. Ces différences seraient d'autant plus sensibles que nous serions plus éloignés de l'époque des observations, et que l'astre auquel elles se rapportent aurait un mouvement plus rapide; ainsi, de tous

les corps célestes, la lune serait celui dont les observations en seraient le plus affectées : or, en calculant directement la distance de la lune au soleil, à l'époque d'une éclipse de lune observée par les Chaldéens 720 ans avant notre ère, on s'est assuré qu'une diminution d'un *dix-millionième*, qui équivaut à un *centième* de seconde à peu près, dans la longueur du jour, rendrait la distance de la lune au soleil trop grande pour que l'éclipse eût pu avoir lieu, tandis qu'au contraire le calcul, fait (*Connaissance des Temps*, p. 1800) d'après nos tables qui supposent le jour constant, la représentent parfaitement; on peut donc conclure de là que la durée du jour n'a pas varié de $\frac{1}{10000000}$ de seconde depuis les anciens Chaldéens jusqu'à nous, c'est-à-dire dans un intervalle de temps qui surpasse 2500 ans.

Quant aux causes, indépendantes de l'action du soleil et de la lune, qui pourraient altérer la durée du jour, la théorie, d'accord avec l'observation, montre encore que leur influence est insensible.

Nous avons vu n° 174 qu'il existe en mécanique un principe général, qui consiste en ce que, dans le mouvement d'un système de points entièrement libres, la somme des aires décrites par chacun d'eux, projetées sur un plan fixe, et multipliées par leurs masses respectives, est une quantité invariable pendant toute la durée du mouvement; on peut conclure de là que, dans le mouvement de rotation d'un corps de forme invariable, la vitesse du mouvement de rotation ne peut être altérée par les actions mutuelles de ses parties. Ainsi, les explosions des volcans, les vents alizés qui soufflent continuellement dans la même direction entre les tropiques, les frottements de

la mer contre la surface du globe, ne peuvent causer ni diminution ni augmentation dans la vitesse de son mouvement de rotation. On déduit du même principe une conséquence très-remarquable relativement aux variations de la température moyenne du globe. Si la terre, comme nous l'avons supposé n° 215, a été primitivement fluide, elle a dû nécessairement se contracter en se refroidissant, et les distances de ses éléments au centre de gravité de la masse venant à diminuer, il a fallu que sa vitesse de rotation s'accélérait par compensation, pour que la somme des aires décrites dans un temps donné se conservât la même. Le calcul montre que, pour satisfaire à cette condition, la vitesse angulaire de rotation doit augmenter en raison inverse du carré du rayon du sphéroïde, et que par conséquent la durée du jour décroît proportionnellement au carré du même rayon. On en a conclu qu'une diminution d'un *centième de seconde* sur la durée du jour correspondrait à une diminution d'un *vingt-millionième* (3 mètres à peu près) dans le rayon terrestre; cette diminution supposerait un abaissement de $\frac{1}{100}$ de degré centigrade dans la température moyenne du globe : or, les observations montrent que le jour sidéral n'a pas varié d'un *centième de seconde* depuis 2500 ans; le rayon moyen de la terre n'a donc pas éprouvé une diminution d'un *vingt-millionième* depuis cette époque, et la température n'a pas varié de $\frac{1}{100}$ de degré centigrade dans cet intervalle. La seule cause qui pourrait altérer d'une manière sensible la vitesse de rotation de la terre serait le déplacement d'une masse considérable à sa surface; ainsi, par exemple, une haute montagne qui serait trans-

portée des pôles à l'équateur rendrait la durée de la rotation plus longue, parce qu'elle se serait éloignée du centre de gravité du sphéroïde; la durée de la rotation diurne deviendrait plus courte, au contraire, si quelque partie importante des régions de l'équateur se rapprochait des pôles; mais comme nous n'apercevons dans la nature aucune cause capable de produire de pareils changements, nous pouvons regarder la vitesse de rotation de la terre et la durée du jour comme rigoureusement invariables.

239. Nous avons jusqu'ici considéré le sphéroïde terrestre comme entièrement solide, et nous n'avons pas eu égard aux oscillations du fluide qui le recouvre en grande partie. Mais de savantes recherches faites par Laplace sur cet objet l'ont conduit à cet important théorème qui rend cette hypothèse tout à fait légitime : « Les » phénomènes de la précession et de la nutation sont » exactement les mêmes que si la mer formait une masse » solide avec la terre. »

CHAPITRE XI.

LIBRATION DE LA LUNE.

Libration optique. — Libration réelle produite par l'attraction de la terre. — Elle est insensible. — Il en résulte que nous n'apercevrons jamais l'hémisphère de la lune qui nous est opposé. — Coïncidence des nœuds de l'équateur et de l'orbite lunaire. — Conséquences déduites de la théorie de la lune relativement à sa figure.

240. Nous avons vu n° 60 que la *libration*, ou cette espèce de balancement par lequel la lune nous découvre et nous dérobe tour à tour quelque partie de sa surface située vers ses bords, n'est qu'un phénomène purement optique ; il tient uniquement aux circonstances dans lesquelles nous sommes placés pour observer la lune, et ne résulte pas des inégalités de son mouvement de rotation, qui peut être toujours regardé comme uniforme, et rigoureusement égal à son moyen mouvement de révolution, condition nécessaire pour que la lune nous montre toujours le même hémisphère.

La théorie explique d'abord comment a pu s'établir cette égalité par l'attraction de la terre sur la lune, sans qu'il soit besoin de supposer que les mouvements moyens de rotation et de révolution aient été rigoureusement

égaux à l'origine ; ce qui serait , en effet , infiniment peu vraisemblable.

L'axe de rotation de la lune est presque perpendiculaire à l'écliptique, n° 60 ; en lui supposant donc, conformément aux lois de la figure des corps célestes , la forme d'un ellipsoïde aplati vers les pôles , le plus grand des deux axes du sphéroïde lunaire est situé dans le plan de son équateur , et c'est aussi celui qui est constamment dirigé vers la terre. Cela posé, concevons (*fig. 103*) qu'un rayon vecteur *TL* soit mené du centre *T* de la terre au centre *L* de la lune ; dans l'état d'équilibre, le grand axe *ab* de la lune doit coïncider avec ce rayon , et si on l'en écarte, l'action de la terre doit tendre à l'y ramener, comme la pesanteur ramène un pendule vers la verticale. Si la vitesse primitive de rotation avait été nulle, ou si elle eût beaucoup différé de la vitesse de translation, l'attraction de la terre ne suffisant plus pour maintenir le grand axe lunaire dans la direction du rayon *TL*, il s'en serait écarté de plus en plus pendant la durée d'une révolution de la lune , et nous aurions aperçu successivement tous les points de sa surface. Mais si la différence primitive entre les deux mouvements a été seulement peu considérable, l'action de la terre , ramenant continuellement le grand axe de la lune vers le rayon vecteur qui joint les deux centres *T* et *L*, rétablit la coïncidence entre les mouvements de rotation et de translation , et il en résulte simplement dans le grand axe du sphéroïde lunaire un mouvement d'oscillations autour de sa position moyenne , semblables aux excursions d'un pendule de part et d'autre de la verticale dont on l'a légèrement écarté.

L'action de la terre sur la lune, pour peu qu'elles s'écarte de la figure sphérique, constitue donc la cause physique d'une libration réelle dans le sphéroïde lunaire : l'observation n'indique point, il est vrai, d'oscillations provenant de cette cause ; mais il en faut conclure seulement qu'elles sont trop petites pour être rendues sensibles par l'observation, et leur existence explique d'une manière très-heureuse comment l'attraction de la terre a établi la parfaite égalité entre les moyens mouvements de rotation et de translation de la lune, et empêche que la différence qui devait exister très-vraisemblablement entre ces mouvements à l'origine des choses ne nous découvre insensiblement les deux hémisphères de cet astre, comme cela serait arrivé sans cette attraction, quelque petite qu'on supposât cette différence.

Le mouvement de la lune dans son orbite est assujetti, non-seulement à des inégalités périodiques, mais encore à des inégalités croissant insensiblement avec le temps : les premières, auxquelles le mouvement de rotation ne participe pas, produisent, n° 60, à raison de cette différence, une libration en longitude qui est périodique comme elles ; mais les secondes ont un effet permanent, et il se pourrait que, par la suite des siècles, l'aspect du disque apparent de la lune vue de la terre devint tout à fait différent, quoiqu'il fût impossible d'y remarquer aucun changement sensible dans la courte durée d'une génération humaine : mais le calcul démontre encore que l'attraction de la terre fait participer le mouvement de rotation aux inégalités séculaires du mouvement de translation, de sorte que le phénomène de la libration demeure le même que si ce dernier

mouvement n'était assujéti qu'à des inégalités périodiques. On ne découvrira donc jamais de la terre, dans aucun temps, des parties de la surface de la lune différentes de celles que nous apercevons aujourd'hui (1).

241. Quant au singulier phénomène de la coïncidence des nœuds de l'équateur et de l'orbite de la lune sur le plan mené par son centre parallèlement à l'écliptique, n° 60, la théorie montre que, pour que cette coïncidence subsiste, il n'est pas nécessaire qu'elle ait eu lieu rigoureusement à l'origine du mouvement ; il suffit que la différence qui existait à cette époque entre les positions des nœuds de l'équateur et de l'orbite lunaire ait été très-petite. L'attraction de la terre a établi ensuite et maintiendra éternellement la coïncidence de leurs nœuds moyens, ainsi que

(1) Nous avons vu dans le chapitre précédent comment on s'était assuré, par la comparaison des observations modernes aux anciennes, que la température du globe terrestre n'avait pas varié de $\frac{1}{200}$ de degré centigrade depuis 2500 ans. M. G. Libri, géomètre d'un esprit aussi ingénieux que profond, a tiré une conclusion analogue relativement à la lune, en se fondant sur le phénomène de sa libration. En effet, on conçoit qu'une diminution de température, en contractant les éléments du sphéroïde lunaire, aurait nécessairement altéré la coïncidence qui doit exister entre son moyen mouvement de rotation et son moyen mouvement de révolution, pour qu'elle nous présente toujours le même hémisphère ; et en vertu de l'attraction de la terre, il en serait résulté une libration en longitude, d'une étendue plus ou moins considérable, que la précision des observations modernes aurait sans doute fait découvrir. Or, comme les observations les plus exactes ne nous indiquent aucun phénomène semblable, il en faut conclure que le sphéroïde lunaire n'a subi dans sa température aucune variation sensible du moins depuis les plus anciennes observations jusqu'à nous. Enfin les mêmes inductions démontrent encore, n° 211, qu'aucune comète d'une masse appréciable n'a pu depuis l'origine du monde se rencontrer sur le passage de la lune.

l'invariabilité de leur inclinaison moyenne sur le plan de l'écliptique. Enfin, le calcul montre que les variations séculaires du plan de l'écliptique n'altèrent point l'exactitude de ces deux phénomènes.

242. Les formules de la théorie, comparées aux observations, ont fourni plusieurs données précieuses sur la constitution physique de la lune; elles montrent que l'on satisfait aux phénomènes de sa libration, tels que l'observation les indique, en supposant à la lune la figure d'un ellipsoïde qui ne serait pas de révolution, et dont le plus petit des trois axes serait celui des pôles, le plus grand l'axe de l'équateur dirigé vers la terre, et l'axe moyen, celui qui, compris dans le même plan, est perpendiculaire au précédent. Cette figure s'accorderait très-bien avec celle que la lune aurait prise pour arriver à l'état d'équilibre, en la supposant originairement fluide, et composée de couches concentriques de densité quelconque; en effet, le mouvement de rotation a dû, selon la loi ordinaire, abaisser ses pôles, et renfler son équateur, tandis que l'attraction de la terre a dû l'allonger dans le sens de l'axe continuellement dirigé vers elle. Cependant, les différences que la théorie indique entre ces trois axes, quoique très-petites, paraissent plus considérables qu'elles ne devraient l'être, si la lune avait exactement conservé en se solidifiant la figure qui convenait à l'équilibre de toutes ses parties; ce qu'il faut attribuer à l'influence que sa constitution particulière, son peu d'aplatissement, et les hautes montagnes qui couvrent sa surface, doivent exercer nécessairement sur les phénomènes de son mouvement de rotation.

Il existe entre les mouvements de rotation de la terre

et de la lune une différence essentielle ; nous avons vu que l'axe terrestre était invariable dans l'intérieur du globe , il n'en est pas de même relativement à la lune ; ses pôles de rotation varient légèrement à sa surface , et peuvent faire , autour de leur position moyenne , des excursions dont le *maximum* est de 2'36".

La pesanteur terrestre qui , en ramenant continuellement vers nous le même hémisphère de la lune , nous ôte à jamais l'espoir de découvrir l'hémisphère opposé , constitue certainement l'un des effets les plus singuliers de la loi de la gravitation universelle. Il paraît que cet effet peut être généralisé et doit s'étendre à toutes les planètes qui ont des satellites. Ainsi , les trois derniers satellites de Jupiter , dans lesquels on a reconnu un mouvement de rotation égal à leur moyen mouvement de translation , doivent tourner continuellement vers le centre de leur planète les mêmes parties de leur surface , quand bien même cette égalité , comme cela est très-probable , n'aurait pas été rigoureuse à l'origine du mouvement.

CHAPITRE XII.

DES MARÉES.

Principales circonstances du phénomène. — L'action du soleil et de la lune sur les eaux de la mer produit le flux et le reflux de l'Océan. — La hauteur des marées varie selon la position respective des deux astres. — Rapport de l'action du soleil à celle de la lune, on en conclut la masse de cet astre. — Les hauteurs des marées diminuent à mesure que les déclinaisons des astres qui les produisent augmentent. — Retard journalier des marées. — Établissement du port. — Règle pour calculer dans chaque port l'heure de la pleine mer. — Influence des circonstances locales sur le phénomène des marées. — Marées atmosphériques.

243. Considéré comme une des conséquences de la grande loi de la pesanteur universelle, le phénomène des marées devait plus que tout autre attirer l'attention des géomètres parce qu'il nous offre le moyen, le plus simple que nous ayons, de vérifier la théorie en comparant ses résultats aux faits qui se passent chaque jour sous nos yeux. Mais avant de nous occuper des causes qui le produisent, nous allons rappeler d'abord les principales circonstances du phénomène.

Dans les mers d'une vaste étendue on observe un mouvement périodique et régulier qui agite leurs eaux,

et qui les élève et les abaisse tour à tour deux fois dans l'espace de vingt-cinq heures à peu près. Ce mouvement ne s'opère pas brusquement, les eaux pendant six heures montent au-dessus de leur niveau et s'étendent sur les rivages ; elles demeurent pendant quelques minutes dans un état d'immobilité complète ; elles redescendent ensuite pendant six heures environ, demeurent un moment stationnaires, puis elles recommencent de nouveau à s'élever, et ainsi de suite.

Le mouvement ascensionnel des eaux de la mer se nomme le *flux*, le mouvement contraire par lequel elles s'affaissent se nomme le *reflux*. Le moment où se termine le flux, lorsque la mer arrivée à sa plus grande élévation demeure quelques instants en repos, se nomme la *pleine mer* ; le moment où finit le reflux, c'est-à-dire où la mer cesse de descendre, se nomme la *basse mer*. Le *flux* et le *reflux* réunis constituent le phénomène des marées, et l'on appelle *marée totale* la demi-somme des hauteurs de deux pleines mers consécutives, comptées du point le plus bas où la mer est descendue dans l'intervalle.

Les deux mouvements par lesquels la mer s'élève et s'abaisse ne sont pas d'égale durée, et la mer emploie en général plus de temps à descendre qu'à monter : à Brest, par exemple, la différence est de 15 à 20 minutes, en sorte que la basse mer ne tient pas le milieu entre les deux hautes mers consécutives. Dans un port libre et dégagé des obstacles naturels qui peuvent retarder le mouvement des eaux, l'intervalle qui sépare deux hautes mers successives, du matin, ou du soir, est de $24^h\ 50'$; pendant lesquelles on observe deux flux et deux reflux.

La marée n'arrive donc pas tous les jours à la même heure dans chaque port; l'instant du phénomène retarde journallement de $\frac{3}{4}$ d'heure environ sur celui de la veille, et cette circonstance offre une analogie remarquable avec le mouvement de la lune dont les passages au méridien retardent chaque jour de la même quantité.

Les hauteurs auxquelles la mer s'élève dans un même lieu de la terre, ne sont pas constamment égales; elles varient pendant la durée d'un mois et dans les diverses saisons de l'année. Ces différences consistent: 1° en ce que les marées sont plus grandes dans les nouvelles et pleines lunes, c'est-à-dire dans les syzygies, n° 52, que lorsque la lune est à 90° du soleil, c'est-à-dire dans les quadratures. La valeur moyenne de la marée totale du matin, à Brest, dans son *maximum* vers les syzygies, lorsque le soleil et la lune sont dans l'équateur et à leur moyenne distance de la terre, est de 6^m,2490; dans les mêmes circonstances elle est de 3^m 0990 à son *minimum* vers les quadratures. La plus haute et la plus basse marée n'ont pas lieu le jour même de la syzygie, mais un jour et demi après et lorsque la lune est à 19° environ au delà des pleines et nouvelles lunes; les plus basses marées ont lieu lorsque la lune est à 19° à peu près au delà du premier ou du dernier quartier; 2° les hauteurs des marées syzygies sont plus grandes et les hauteurs des marées quadratures sont plus petites vers les équinoxes qu'à toute autre époque de l'année. Vers les solstices, au contraire, les marées des pleines et des nouvelles lunes sont moins fortes que celles des autres lunaisons, tandis que les marées des quadratures sont plus considérables. A Brest, les marées totales sy-

zygies sont d'environ $0^m,75$ plus petites dans les solstices que dans les équinoxes. Les marées totales des quadratures sont plus petites de la même quantité dans les équinoxes que dans les solstices.

On remarque encore comme circonstances particulières du phénomène que les marées des nouvelles et pleines lunes sont plus grandes, et les marées quadratures plus petites en hiver, temps où le soleil est plus près de nous, qu'en été où il est plus éloigné. Il existe aussi une petite différence entre les marées du matin et du soir ; à Brest, la marée du matin surpasse celle du soir de $0^m,83$ dans les syzygies des solstices d'été ; elle en est surpassée de la même quantité dans les syzygies des solstices d'hiver ; enfin la hauteur des marées diminue à mesure que la latitude du lieu dans lequel on les observe augmente, et à 65° de latitude le flux est tout à fait insensible.

244. Ce simple exposé des principaux phénomènes des marées suffit pour nous montrer qu'ils ont avec les mouvements du soleil et de la lune une corrélation évidente. Aussi cette remarque n'avait-elle pas échappé aux philosophes de l'antiquité, et ils en avaient conclu que la lune et le soleil, et surtout le premier de ces deux astres, sont la vraie cause du flux et du reflux des mers ; mais il était réservé à Newton de nous montrer comment cette cause opère et comment l'attraction de ces deux astres peut en se combinant soulever et laisser retomber tour à tour les eaux de l'Océan.

Nous avons vu, n° 215, que si la mer recouvrait toute l'étendue de la surface terrestre, en vertu de la pesanteur et de la rotation diurne, elle aurait pris, pour ar-

river à l'état d'équilibre, la forme d'un ellipsoïde aplati aux pôles et renflé sous l'équateur. La mer conserverait toujours la même forme, si aucune force étrangère n'agissait sur elle ; mais l'action perturbatrice du soleil et de la lune doit tendre continuellement à altérer sa figure d'équilibre, et à y produire des agitations semblables à celles que nous présentent le flux et le reflux. En effet, si l'action des deux astres était la même sur toutes les parties de la terre, le seul effet qu'elle produirait serait de déplacer toute la masse du globe et du fluide qui le recouvre sans causer aucun dérangement dans la situation respective de leurs molécules. Mais l'attraction variant en raison inverse du carré des distances, il s'ensuit que les parties fluides, situées dans l'hémisphère tourné vers l'astre, sont plus fortement attirées que le centre du globe qui en est plus éloigné ; les parties fluides, en vertu de leur parfaite mobilité, doivent donc s'élever vers l'astre qui les attire, et s'écarter du centre de la terre avec une force égale à la différence des actions que cet astre exerce sur les molécules fluides et sur le centre du globe. Au contraire, les particules fluides situées dans l'hémisphère opposé à l'astre, étant moins fortement attirées que le centre de la terre, doivent demeurer en arrière, et elles paraîtront encore s'être soulevées sous l'astre qui les sollicite comme celles de l'hémisphère supérieur.

Ainsi donc, en supposant le soleil (*fig. 104*) mu dans le plan de l'équateur, son attraction doit avoir pour effet d'élever les eaux de la mer dans les deux points opposés de la terre A et B qui se trouvent sur la droite qui joint le centre de la terre à celui du soleil ; les autres parties du

fluide doivent tendre à suivre le mouvement de ces deux points avec une vitesse d'autant plus grande qu'elles en sont plus rapprochées ; et comme il ne peut y avoir élévation dans une partie du fluide sans qu'il y ait en même temps dépression dans l'autre, la masse fluide devant toujours demeurer la même , on conçoit que dans les positions intermédiaires la mer sera affaissée , et c'est à 90° de distance en longitude des deux points les plus élevés que se trouveront les points C et D du plus grand abaissement.

L'action du soleil produira donc par jour deux soulèvements des eaux de la mer en chaque lieu de la terre : le premier, lors du passage de l'astre par le méridien supérieur, parce qu'alors les molécules fluides sont plus fortement attirées que le centre du globe ; le second , lors du passage au méridien inférieur, parce que le centre de la terre est alors plus puissamment attiré que les molécules fluides. L'élévation aura lieu au même instant pour les points situés sur le même méridien et diamétralement opposés , lorsque le soleil traversera ce plan. A 90° de distance de ces deux points , la mer est affaissée parce qu'elle fournit les eaux qui alimentent le flux. Le soleil produira donc deux marées par jour, c'est-à-dire deux flux et deux reflux. Il en serait de même relativement à la lune : nous devrions donc distinguer quatre marées différentes dans l'espace d'un jour lunaire , savoir deux marées solaires et deux marées lunaires ; mais les actions simultanées des deux astres se combinent entre elles dans la production du phénomène qui se réduit aux deux marées journalières que nous observons. De là doivent résulter de grandes variétés, soit dans les heures,

soit dans les hauteurs des marées, selon que l'action du soleil et celle de la lune concourront à produire les mêmes effets, ou qu'elles se contrarieront mutuellement.

Dans les oppositions ou les conjonctions, les actions des deux astres s'ajoutent pour soulever les eaux de la mer; dans les quadratures, au contraire, les eaux ne sont soulevées qu'en vertu de la différence de ces deux actions. En effet, dans les conjonctions, le soleil et la lune traversent en même temps le méridien; dans les oppositions, l'un des deux astres passe au méridien supérieur dans le même instant où l'autre astre passe au méridien inférieur; or, dans l'un et l'autre cas, il est clair qu'ils tendent tous deux à la fois à élever les eaux de la mer dans les points situés sous ce méridien. Les deux marées partielles que leur action produit se superposent sans se nuire, comme les ondes d'un bassin légèrement agité, et la marée totale est, dans ce cas, la somme de la marée lunaire et de la marée solaire. Dans les quadratures la lune se trouvant à 90° du soleil, tend à soulever les eaux situées au-dessous d'elle, tandis que le soleil tend à les abaisser, et réciproquement : la marée totale n'est par conséquent que l'excès de la marée du plus puissant des deux astres sur la marée du plus faible, et doit se trouver très-diminuée. Toutes choses égales d'ailleurs, les plus grandes marées auront donc lieu dans les syzygies, et les plus basses vers les quadratures. Dans les points intermédiaires, la marée solaire ne tend qu'à altérer l'heure et la hauteur de la marée lunaire, tantôt dans un sens, tantôt dans le sens opposé, selon les positions respectives des deux astres qui les produisent.

245. Comparons les intensités des actions du soleil et de la lune dans le phénomène des marées. Nous avons vu que l'action que le soleil ou la lune exerce pour soulever les eaux de la mer, ne se compose pas de l'action totale de ces deux astres sur le sphéroïde terrestre, mais de la différence des actions qu'ils exercent sur le centre du globe et sur le fluide qui couvre sa surface. Le calcul montre que ces forces sont entre elles comme les masses de chacun des deux astres respectivement divisées par le cube de leur distance au centre de la terre. Or, quoique la masse du soleil soit incomparablement plus grande que celle de la lune, comme il est infiniment plus éloigné de la terre que cet astre, il en résulte que son action pour soulever les eaux de la mer est beaucoup plus faible que celle de la lune. La distance du soleil à la terre est 400 fois à peu près celle de la lune : il scrait donc facile d'évaluer le rapport de leurs actions respectives dans le phénomène des marées si nous avions celui de leurs masses ; malheureusement la masse de la lune ne nous est pas suffisamment connue pour faire ce calcul (1), et le phénomène des marées nous offre même un des moyens les plus sûrs que nous ayons pour la déterminer. En comparant les marées dans les quadratures et dans les syzygies, Newton est parvenu à séparer les marées lunaires et les marées solaires, dont les lois sont différentes, et il a trouvé que le rapport des forces qui les produisent est environ celui de 1 à 6; Daniel Bernouilli, par une évaluation plus exacte, a trouvé ce rapport égal à 2,5, et Laplace, en

(1) On a vu n° 235, que la masse de la lune déduite du phénomène de la précession et de la nutation laisse encore de l'incertitude.

prenant la moyenne d'observations très-précises faites dans le port de Brest, l'a évalué à 2,3533, ce qui se rapproche de la valeur précédente (1). L'action de la lune sur les eaux de la mer est donc, dans des situations analogues des deux astres, deux fois et demie à peu près plus grande que celle du soleil. La grandeur des oscillations de la mer devant être supposée proportionnelle aux forces qui les produisent, les marées lunaires seront donc, toutes choses égales d'ailleurs, beaucoup plus fortes que celles du soleil.

De là on déduit un moyen très-simple de déterminer la masse de la lune. En effet en nommant L la masse du soleil, r sa moyenne distance à la terre, et en désignant par L' et r' les mêmes quantités relatives à la lune, les actions de ces deux astres pour mouvoir les eaux de la mer seront entre elles comme $\frac{L}{r^3}$ est à $\frac{L'}{r'^3}$. Nous venons de voir que, d'après les observations, ce rapport était ce-

(1) Lorsque le port est situé à l'équateur, selon la théorie de Newton, l'excès de la plus haute mer syzygie sur la plus basse mer syzygie est égal à la somme des actions du soleil et de la lune; l'excès de la plus haute mer quadrature sur la plus basse mer quadrature exprime la différence de ces actions. Si le port n'est pas situé à l'équateur, il faut multiplier ces actions par le *cosinus* du carré de latitude. On conçoit donc qu'il est facile ainsi de déterminer, par l'observation des hauteurs des marées syzygies et quadratures, le rapport des actions du soleil et de la lune. Bernouilli préféra employer pour le déterminer, au lieu des hauteurs des marées, comme avait fait Newton, leurs retards journaliers qui sont à leur *maximum* dans les syzygies, et à leur *minimum* dans les quadratures; mais comme les hauteurs des pleines mers sont en général plus faciles à observer que l'instant précis de leur arrivée, Laplace est revenu sur ce point aux idées de Newton, et c'est sur la considération des hauteurs des marées en ayant égard à toutes les circonstances accessoires qu'il a déterminé le rapport donné dans le texte.

lui de 1 à 2,3533; la distance du soleil à la terre est environ 400 fois plus grande que celle de la lune; la masse du soleil est au moins 354,500 fois celle de la terre, n° 183; au moyen de ces nombres on trouve que la masse de la lune est égale à $\frac{1}{76}$ de celle de la terre. La comparaison des phénomènes de la *précession* et de la *nutation* n° 235 donne $\frac{1}{9}$ pour le même rapport; ces deux valeurs déduites de phénomènes très-différents s'accordent entre elles, comme on voit, d'une manière satisfaisante.

246. Jusqu'ici nous avons supposé le soleil et la lune en mouvement dans l'équateur; considérons maintenant les actions de ces deux astres sur les eaux de la mer en supposant variable leur distance à l'équateur, comme cela a lieu réellement. Il est clair que le soleil et la lune ne s'éloignant jamais beaucoup de ce plan, les phénomènes des marées, tels que nous les avons d'abord décrits, n'en seront que légèrement modifiés. La théorie se réunit à l'observation pour montrer que l'influence des deux astres s'affaiblit à mesure qu'ils s'écartent du plan de l'équateur, c'est-à-dire que *l'élévation des marées*, toutes choses égales d'ailleurs, *diminue à mesure que les déclinaisons du soleil et de la lune augmentent*. Ainsi deux causes principales influent sur les hauteurs des grandes marées, vers les nouvelles et les pleines lunes, les variations des distances des astres qui les produisent et de leurs déclinaisons. Ces hauteurs sont d'autant plus considérables que la lune et le soleil sont plus rapprochés de la terre et du plan de l'écliptique. *Les plus grandes marées syzygies ont donc lieu à l'équinoxe quand la lune est à la fois dans l'équateur et dans son péricée: les plus petites arrivent au solstice d'hiver lorsque la*

lune est apogée et dans sa plus grande déclinaison (1).

247. Nous ne nous sommes occupés dans ce qui précède que des hauteurs des marées ; nous allons considérer maintenant les phénomènes relatifs aux intervalles qui les séparent.

Faisons pour un moment abstraction du soleil ; si les eaux de la mer obéissaient instantanément à l'action des forces qui les sollicitent, la pleine mer devrait avoir lieu au moment où la lune traverse le méridien. Mais en vertu de la force d'inertie qui tend à maintenir tous les corps de la nature dans l'état qu'ils occupent à un instant donné, l'heure de la pleine mer doit être retardée et sa hauteur généralement diminuée. C'est la même raison qui fait qu'après le flux et le reflux les eaux de la mer demeurent un instant dans un état de stagnation apparent avant de redescendre ou de remonter, parce qu'elles tendent à conserver l'élévation ou l'abaissement qu'elles ont atteint dans le moment de la haute mer ou de la basse mer, avant de céder aux nouvelles forces qui agissent sur elles.

Sur toute l'étendue de nos côtes, on remarque que les marées sont retardées d'un jour et demi à peu près ,

(1) On trouve chaque année dans la *Connaissance des temps* le tableau des plus grandes marées de l'année. Elles sont calculées par une formule très-simple, fondée sur ces principes indiqués par la théorie et confirmés par l'observation :

1^o Chaque marée lunaire ou solaire augmente comme le cube du diamètre apparent ou de la parallaxe de l'astre qui la produit ;
2^o elle diminue comme le carré du cosinus de la déclinaison de cet astre ; 3^o dans les moyennes distances du soleil et de la lune à la terre, la marée lunaire est trois fois plus grande que la marée solaire.

en sorte que la marée dans chaque port n'est pas le résultat de l'action immédiate des astres, mais celui de leur action antérieure de 36 heures. Ainsi, par exemple, les plus hautes et les plus basses marées ne sont pas celles qui ont lieu le jour même des syzygies et des quadratures, mais celles qui les suivent à un jour et demi de distance. De sorte que si la syzygie arrive à l'instant de la pleine mer, la plus haute marée est la *troisième* qui la suit, et pareillement, si la quadrature arrive au moment de la pleine mer, la *troisième* marée suivante est la plus petite.

Outre ces causes générales du retard des marées, les circonstances particulières à chaque localité, la profondeur des eaux, les irrégularités du sol contre lequel elles frottent, les obstacles de toute nature qui s'opposent aux libres mouvements de la mer, peuvent faire varier le temps que les impressions qu'elle reçoit mettent à se transmettre dans nos ports. Le retard que la marée éprouve en chaque lieu de la terre sur l'instant du passage de la lune au méridien à l'époque de la conjonction, se nomme *l'établissement du port*. Comme les circonstances qui produisent ce retard demeurent toujours à peu près les mêmes, l'établissement du port est aussi une quantité à peu près constante; mais elle varie d'une manière fort sensible d'un lieu à un autre, et même quelquefois pour des lieux très-voisins.

A Dunkerque, l'établissement du port est de 11^h 45', la lune étant supposée dans ses distances moyennes à la terre; il est de 9^h 15' au Havre, de 7^h 45' à Cherbourg, de 3^h 33' à Brest, etc. *L'établissement du port* se détermine dans chaque lieu par l'observation de

l'heure à laquelle la pleine mer arrive le jour de la nouvelle lune.

L'élévation des eaux à l'instant de la pleine mer est le résultat des actions combinées du soleil et de la lune ; ces deux astres ne se trouvent dans le méridien au même instant que deux fois par mois : l'heure à laquelle la mer atteint sa plus grande hauteur doit donc varier chaque jour comme l'heure à laquelle la lune traverse le méridien. Dans les nouvelles et les pleines lunes , l'instant où les deux astres exercent leur plus grande action, est celui du passage de la lune au méridien ; il en est de même lors du premier et du dernier quartier ; les autres jours cet instant précède quelquefois le passage, ou bien d'autres fois il le suit ; mais il ne peut jamais s'en écarter beaucoup, parce que la force attractive de la lune est, comme on l'a vu, trois fois plus grande que celle du soleil. L'analyse fournit des formules qui donnent exactement l'heure de la pleine mer, dans un port dont la latitude est connue, lorsque l'établissement du port est déterminé. Ces formules calculées pour chacun des ports les plus fréquentés, peuvent être aisément réduites en tables qui sont très-utiles aux marins, parce qu'ils ne peuvent ordinairement entrer dans les ports ou en sortir qu'au moment de la haute mer, et qu'il leur importe par conséquent de connaître exactement l'heure à laquelle le phénomène se produit.

Il suit de ce qui précède que l'espace de temps qui s'écoule entre deux marées consécutives, n'est pas constamment le même ; il est sujet à quelques variations dépendantes des phases de la lune. Sa valeur moyenne est de $24^h\ 50' 28''$: l'intervalle qui sépare deux marées con-

sécutives surpasse donc la durée du jour solaire d'une heure environ. Cet intervalle est le plus petit qu'il soit possible dans les syzygies quand les marées atteignent leur plus grande hauteur; il est alors de $24^h 38' 57''$, et comme le mouvement de la lune est de $24^h 50' 28''$, le retour des marées anticipe de $11'$ à peu près sur le passage de la lune au méridien. Dans les quadratures, au contraire, lorsque les hauteurs de la mer sont à leur *minimum*, l'intervalle entre deux marées consécutives atteint sa plus grande valeur; il est alors de $24^h 74' 58''$ et la marée retarde de $25'$ à peu près sur le mouvement de la lune. Enfin l'intervalle moyen arrive beaucoup plus près des quadratures que des syzygies. Les valeurs précédentes répondent aux distances moyennes du soleil et de la terre; les variations de ces distances et surtout de celles de la lune y causent quelques altérations. Les variations dans les déclinaisons influent aussi sur le retard des marées d'un jour au suivant, comme elles influent sur leur hauteur.

248. On peut donc, en ayant égard aux circonstances particulières à chaque localité, rendre raison de tous les phénomènes que les marées nous présentent. Mais, outre les causes permanentes qui peuvent influencer sur le phénomène, les vents ont aussi sur le mouvement des eaux de l'Océan une action extrêmement puissante, et qu'il est malheureusement impossible de prévoir. Lorsqu'ils conspirent avec l'action de la lune et du soleil pour augmenter la hauteur des grandes marées des équinoxes, ils peuvent produire des inondations, et il est heureux que la théorie ait permis d'indiquer d'avance les époques de ces phénomènes pour prévenir autant que possible

les accidents. Le calcul de la hauteur des marées et des heures auxquelles elles arrivent est aussi très-utile pour les travaux des ports et pour les besoins de la navigation ; on peut dire que la théorie, sur ce point, a été aujourd'hui assez perfectionnée pour qu'il soit facile de prédire, plusieurs années d'avance, la hauteur à laquelle la mer doit s'élever dans un lieu donné de la terre, à moins que des vents violents ou quelque autre circonstance extraordinaire ne vienne à déranger l'ordre de la nature. La théorie mathématique des marées, parfaitement d'accord en tout point avec les observations, est devenue ainsi l'une des preuves les plus évidentes de la loi de la gravitation universelle (1).

Laplace, en considérant les oscillations d'un fluide placé sur un sphéroïde elliptique et doué d'un mouvement initial supposé très-petit, et en cherchant les conditions nécessaires pour que le mouvement du fluide fût toujours renfermé dans des limites très-étroites, a

(1) On peut se former une idée exacte de la manière dont la théorie a pu s'appliquer au phénomène des marées, en concevant que la force qui sollicite les eaux de la mer soit exprimée par le *cosinus* d'un angle qui croît proportionnellement au temps : il en résulte un flux partiel croissant de la même manière, mais dans l'expression de la hauteur duquel la constante qui multiplie le temps sous le signe *cosinus* et le coefficient du *cosinus* peuvent différer beaucoup, à raison des circonstances accessoires, des valeurs qu'ils ont dans l'expression de la force qui produit le flux. Les actions du soleil et de la lune peuvent être développées en séries semblables, et chaque terme peut être regardé comme produisant un flux partiel ; l'ensemble de tous ces flux forme le flux total, et l'hypothèse sur laquelle on établit l'équation qui les lie entre eux, constitue la théorie mathématique des marées : l'accord des résultats qui s'en déduisent avec les observations, sert ensuite à en confirmer l'exactitude.

trouvé que le fluide dérangé de son état d'équilibre par des forces quelconques , ne s'en écartera jamais que de quantités très-petites , pourvu que sa densité soit moindre que la densité moyenne du sphéroïde qu'il recouvre ; dans le cas contraire, les écarts pourraient devenir considérables. La condition précédente est remplie, par rapport à la terre , comme on l'a vu n^o 218, ce qui assure à jamais la stabilité de l'équilibre des mers.

Tels sont les faits les plus remarquables que nous présenterait le phénomène des marées , si les mers étaient partout également profondes et d'une égale étendue. Mais l'on conçoit que les circonstances locales doivent apporter de grandes variétés soit dans la hauteur des marées , soit dans les heures auxquelles le phénomène arrive. Ainsi, la théorie montre que l'action du soleil et de la lune aura d'autant plus d'énergie qu'elle s'exercera sur une surface plus étendue ou sur un plus grand nombre de molécules ; et c'est par cette raison que le mouvement du flux et du reflux est très-considérable dans l'Océan , et qu'il est à peine sensible dans la mer Caspienne , dans la mer Baltique et même dans la Méditerranée. La configuration des côtes , l'escarpement des rivages , l'inégalité de la profondeur des mers , ont aussi une grande influence sur les hauteurs et sur les intervalles des marées ; mais en tenant compte des circonstances locales , on explique aisément , comme nous l'avons dit , toutes les variétés qu'elles peuvent présenter, et l'on en tire de nouvelles preuves de l'exactitude de leur théorie.

Marées atmosphériques.

249. L'action du soleil et de la lune qui produit dans la mer le phénomène du flux et du reflux, doit causer dans l'atmosphère des mouvements semblables. Si ces mouvements sont sensibles, ils doivent se manifester dans le baromètre par des oscillations dont les périodes seront les mêmes que celles du flux et du reflux. C'est ce qui a engagé depuis plusieurs années les observateurs à suivre avec attention les variations de cet instrument, pour parvenir à en déterminer les lois. Malheureusement, l'étendue des oscillations du baromètre, indépendantes des causes qui produisent les grandes variations auxquelles il est soumis, est très-petite; elle ne dépasse pas un millimètre, par exemple, à l'équateur où elle est la plus grande. Ce n'est donc que par une longue suite d'observations, que l'on peut espérer de tirer avec quelque vraisemblance quelques conséquences positives d'éléments aussi délicats.

Le seul résultat qui soit jusqu'ici bien constaté par les observations, c'est la variation diurne du baromètre: un seul mois suffit pour la manifester. La plus grande hauteur a lieu vers *neuf* heures du matin et *dix* heures du soir, la plus petite vers *trois* heures du soir et *quatre* heures du matin. L'étendue de ces variations n'est pas la même dans toutes les saisons; on a trouvé à Paris que l'excès de la plus grande hauteur du baromètre qui répond à 9 heures du matin, sur la plus petite qui répond à 3 heures du soir, était de 0^m,762. M. Bouvard, d'après la comparaison d'un très-grand nombre d'obser-

- vations, a été amené à penser que l'étendue de cette variation diurne, qui est la plus grande sous l'équateur et au niveau de la mer, diminue de l'équateur aux pôles proportionnellement au carré du *cosinus* de la latitude. En sorte, qu'à de très-grandes latitudes elle est presque insensible, et qu'aux pôles elle se réduirait tout à fait à zéro, si on pouvait y atteindre.

Ces variations diurnes du baromètre dépendent sans doute de causes régulières. Leurs périodes, réglées par le jour solaire, semblent indiquer qu'elles sont dues à l'influence du soleil; mais de quelle nature est cette influence, c'est ce qu'on n'a pu jusqu'ici que soupçonner vaguement. Le flux atmosphérique, qui dépend de l'action directe du soleil et de la lune sur l'atmosphère, doit être soumis aux mêmes lois que le flux de l'Océan, et il est comme ce dernier la combinaison de deux flux partiels produits l'un par l'action du soleil, l'autre par l'action de la lune. La période des oscillations du baromètre provenant du soleil serait d'un demi-jour solaire, et elles doivent se confondre par conséquent avec la variation diurne qui a la même période et dont elles ne font que modifier l'étendue, en sorte qu'il paraît à peu près impossible de les séparer. Mais il n'en serait pas de même pour le flux produit par l'action de la lune, dont la période serait d'un demi-jour lunaire, et dont l'existence devrait se manifester par des observations faites dans les diverses phases de la lune. Ainsi, par exemple, si le *minimum* de ce flux arrive à 9 heures du matin le jour de la syzygie, son *maximum* arrivera vers 3 heures du soir; le contraire aurait lieu dans le jour de la quadrature, le flux lunaire augmentera donc la variation diurne

du soir dans le premier cas , il la diminuera dans le second , et la différence sera le double du flux lunaire atmosphérique. Or, toutes les observations ont montré jusqu'ici qu'il était à peu près insensible. Ainsi en considérant 298 syzygies et autant de quadratures, M. Bouvard, après des calculs immenses, a conclu que l'étendue entière de l'oscillation provenant de cette cause depuis son *maximum* jusqu'à son *minimum* , était de 0,018 millimètres ; et a trouvé 2^h 8' du soir pour son *maximum* le jour de la syzygie. Un résultat si minime rend très-incertaine l'existence même d'une oscillation sensible du baromètre, dépendant de l'action directe du soleil ou de la lune sur l'atmosphère, du moins à la latitude de Paris (1). Sans doute, un plus grand nombre d'observations, surtout si l'on peut en obtenir, faites à l'équateur où l'influence des actions du soleil et de la lune doivent être le plus sensible , avec le même soin que celles que l'on a réunies à l'Observatoire de Paris , fournirait le moyen le plus certain d'éclaircir ce point intéressant de la météorologie.

(1) Ajoutons cependant que M. Flaugergues , qui a réuni vingt années d'observations de la plus grande exactitude, semble être parvenu à des résultats très-différents, et a reconnu dans l'action de la lune sur la pression atmosphérique une influence bien marquée. Selon cet observateur, 1^o l'étendue entière de la variation qui en résulte pendant la durée d'un mois lunaire, dans la hauteur du baromètre, selon la position de la lune par rapport au soleil, serait de 1,67 millimètre; 2^o l'action de la lune serait plus forte lorsque sa déclinaison est australe que lorsqu'elle est boréale, ce qui est conforme à ce qu'on observe dans les marées de l'Océan ; 3^o l'excès de la hauteur barométrique due à l'action de la lune périgée sur celle qui a lieu à l'apogée serait de 1,10 millimètre. Le temps éclaircira les doutes que peuvent faire naître des résultats si contradictoires.

La puissance attractive de la lune n'ayant sur le flux atmosphérique qu'un effet à-peu près insensible, comme on vient de le voir, celle du soleil doit être très-probablement tout à fait inappréciable, puisque l'action attractive de la lune étant triple de celle du soleil, d'après les observations des marées à Brest, le flux lunaire atmosphérique doit être au moins double du flux solaire. On a donc dû penser que les variations diurnes du baromètre dépendent de l'action que le soleil exerce sur l'atmosphère, non par sa puissance attractive, mais par son pouvoir calorifique. Si telle était en effet la cause de ce phénomène, il serait sans doute à peu près impossible de la soumettre au calcul, et la théorie se verrait sur ce point réduite à enregistrer les faits sans moyen de les prévoir ou de les vérifier.

CHAPITRE XIII.

DES MOUVEMENTS PROPRES DES ÉTOILES.

Mouvement de translation du système solaire. — Mouvements observés dans les étoiles doubles. — Influence des étoiles sur le système planétaire.

250. Nous avons vu dans le chapitre III que l'immobilité des étoiles n'est pas rigoureuse et que plusieurs d'entre elles sont assujetties à des mouvements propres que les observations ont fait reconnaître. Mais nous avons remarqué en même temps qu'il serait possible que ces apparences ne fussent qu'une illusion d'optique qui nous ferait attribuer en sens contraire aux étoiles le mouvement de translation dont le système solaire serait lui-même animé. En effet, si nous rapportons les positions des différentes étoiles à celle vers laquelle nous supposons que le soleil se dirige, il est aisé de voir qu'à mesure que nous nous approcherons de cet astre, les autres étoiles sembleront s'en écarter, les unes dans un sens et les autres dans le sens opposé. On pourra donc par les mouvements propres observés dans différentes étoiles, conclure le mouvement réel du système planétaire. C'est ainsi que l'on a reconnu que le soleil et tout le cortège d'astres qui l'environne,

s'avance vers l'étoile de la constellation d'Hercule, avec une vitesse qui égale au moins celle de la terre dans son orbite. Les observations dignes de confiance que nous possédons aujourd'hui, sont resserrées il est vrai dans un trop court intervalle de temps, pour qu'on puisse établir d'une manière rigoureuse un point si important du système du monde; mais l'accord remarquable qui existe entre les directions observées dans les mouvements propres d'un grand nombre d'étoiles et leur position par rapport à la terre, donne à l'hypothèse du mouvement de translation du système solaire un grand degré de vraisemblance; les observations futures fixeront les doutes qui peuvent rester encore à cet égard.

251. Nous avons vu qu'outre ces mouvements communs à un grand nombre d'étoiles, on avait observé dans quelques groupes d'étoiles très-rapprochées des mouvements particuliers que les astronomes s'appliquent à étudier depuis le commencement de ce siècle avec une attention suivie. Les étoiles de chaque groupe forment des systèmes partiels dont les dimensions sont très-petites relativement aux distances qui les séparent des autres étoiles, et qui semblent circuler autour de leurs centres de gravité respectifs. Nous avons promis de montrer ici par quels moyens on est parvenu à déterminer les mouvements de plusieurs *groupes binaires* ou *étoiles doubles* dans lesquels l'observation avait fait reconnaître un mouvement de révolution de la petite étoile autour de la grande; malheureusement l'espace nous manque pour tenir cet engagement: nous dirons seulement que c'est par l'application de la loi de la gravitation aux mouvements propres des étoiles que l'on est parve-

nu à rendre compte de toutes les apparences que leurs mouvements nous présentent (1). Suivant cette loi dans le cas très-simple d'un groupe composé de deux étoiles, l'orbite que l'une d'entre elles décrit autour de l'autre est une ellipse, on en détermine les dimensions par la comparaison des formules de la théorie aux observations, et si l'on pouvait évaluer le rapport du grand axe de cette ellipse à la distance de la terre au soleil, on en conclurait n° 183, les durées des révolutions étant supposées connues, le rapport de la somme des masses des deux étoiles à celle du soleil. Ainsi le principe de la pesanteur universelle n'embrasse pas seulement les corps de notre système planétaire, il s'étend jusqu'à ces astres dont la distance confond notre imagination, et fait graviter les étoiles les unes autour des autres, en décrivant des orbites immenses dans leurs révolutions qui ont pour la plupart plusieurs siècles de durée.

252. Quoique les étoiles soient prodigieusement éloignées de nous, cependant il se pourrait qu'en leur supposant une masse considérable elles ne fussent pas sans influence sur notre système planétaire. Mais l'analyse a répondu d'une manière tout à fait rassurante à cette question en montrant que l'action des étoiles sur le système solaire sera probablement toujours inappréciable, et qu'en tout cas elle ne pourrait se manifester que dans un temps éloigné de nous de plusieurs millions d'années (2).

(1) Voir le Mémoire de M. Savary (*Connaissance des Temps pour 1830*).

(2) *Théorie analytique du Système du Monde*, tome III, p. 317.

CHAPITRE XIV ET DERNIER.

CONJECTURES SUR LA FORMATION DU SOLEIL ET DES PLANÈTES.

Conséquences générales de la loi de la gravitation. — Hypothèse de Buffon. — Travaux d'Herschell sur les nébuleuses. — Hypothèse de Laplace. — Formation des planètes et des satellites. — Destination des comètes. — Considérations générales. — Conclusion.

253. Dans la première partie de cet ouvrage, nous avons partagé en différentes classes les astres que nous observons dans les cieux, et nous avons étudié chacun d'eux en particulier, en cherchant à dégager leurs mouvements réels d'une foule d'apparences plus ou moins trompeuses dont ils sont enveloppés. Après avoir rendu à chaque corps céleste sa véritable place, et lui avoir assigné sa destination dans le grand œuvre de l'univers, nous avons dans la deuxième partie montré par quels moyens on a pu remonter de la connaissance des mouvements célestes aux causes qui les produisent, et nous avons été amenés à considérer tous les corps de la nature comme le foyer d'une force attractive qui augmente proportionnellement à leurs masses, et qui décroît en raison inverse du carré des distances. Cette hypothèse

sublime, si c'en est une, explique à la fois, de la manière la plus simple, les principaux phénomènes du système solaire, le mouvement des centres de gravité des corps célestes autour du foyer des forces qui les animent, leur mouvement autour de leurs centres de gravité respectifs, enfin leurs figures et les oscillations des fluides qui les recouvrent. Tous ces phénomènes, qui semblaient isolés entre eux avant la découverte de la gravitation universelle, sont enchainés l'un à l'autre par cette grande loi de la nature, en sorte qu'il est évident qu'ils ne pourraient exister séparément. Ainsi le triple mouvement de la terre imaginé par Copernic pour expliquer les mouvements apparents du soleil et des étoiles, dans le système de l'attraction est le résultat simple et inévitable d'une force d'impulsion dont la direction n'aurait pas passé par le centre de gravité du sphéroïde terrestre. En vertu de cette force la terre tourne dans une orbite elliptique autour du soleil, et elle a pris en même temps un mouvement uniforme de rotation sur son centre; la force centrifuge qui résulte de ce mouvement lui a donné une figure aplatie vers les pôles, et l'action du soleil et de la lune sur ce sphéroïde a imprimé à son axe de rotation, autour des pôles de l'écliptique, le mouvement qui produit les phénomènes de la *précession* et de la *nutation*. Tous les mouvements des autres corps célestes, et leurs apparentes inégalités, résultent de la même loi et sont une conséquence logique du mouvement de la terre. « C'est une chose vraiment digne d'admiration, dit Laplace, que la manière dont tous ces phénomènes, qui semblent au premier coup d'œil fort disparates, découlent d'une même loi qui les enchaîne au mouvement de la terre, en sorte

que ce mouvement étant une fois admis, on est conduit par une suite de raisonnements géométriques à ces phénomènes. »

Le principe de la pesanteur universelle, traduit en langage algébrique, suffit pour rendre raison de toutes les altérations du mouvement elliptique des planètes, des comètes et des satellites. Ces altérations sont de deux espèces : les unes ne dépendent que des positions respectives des différents corps du système, et reprennent les mêmes valeurs toutes les fois qu'il revient à la même configuration : elles n'ont donc qu'un effet temporaire et pour ainsi dire alternatif; mais les autres qui s'attachent aux éléments mêmes, qui déterminent la figure et la position des orbites planétaires, les font varier par degrés insensibles dans la suite des siècles, et l'on a pu craindre que la stabilité du système n'en fût à la longue considérablement altérée. L'analyse a dissipé ces appréhensions. L'invariabilité des distances moyennes des planètes au soleil, et les étroites limites dans lesquelles seront éternellement renfermées les variations des excentricités et des inclinaisons de leurs orbites, assure la conservation du système planétaire dans un état voisin de son état actuel; les orbites ne font qu'osciller autour d'un état moyen d'ellipticité et d'inclinaisons dont elles ne s'écarteront jamais que de très-petites quantités, n° 188.

Les moyens mouvements planétaires sont invariables comme les grands axes d'où ils se déduisent par la troisième loi de Kepler, ce qui assure la constance de la durée de leurs révolutions sidérales, et en particulier celle de l'année sidérale, n° 187. Le moyen mouvement

de la lune est seul soumis à une inégalité séculaire considérable que l'observation a déjà rendue sensible, et qui par la suite des temps pourra s'élever à plusieurs circonférences ; mais l'accélération qui en résulte se changera enfin en un retardement , et le moyen mouvement après avoir été en croissant pendant un grand nombre de siècles , reviendra par des diminutions successives à son état moyen , n° 198. En général , toutes les inégalités séculaires sont périodiques comme les autres inégalités planétaires ; elles en diffèrent seulement en ce que leurs périodes sont infiniment plus longues. Les inclinaisons des équateurs des planètes sur leurs orbites respectives sont généralement très-petites , et les inégalités qui les affectent en se développant par la suite des temps n'y apportent que des variations peu considérables : ainsi , par exemple , l'obliquité de l'écliptique restera dans tous les siècles à peu près la même que nous la voyons aujourd'hui , condition qui assure la stabilité dans l'ordre et dans la température des saisons , sur la terre et sur les planètes , n° 230. Enfin , l'uniformité du mouvement de rotation de la terre assure la constance de la durée du jour , en même temps que la permanence des pôles à la surface de la terre et la stabilité de l'équilibre des mers nous garantissent contre les envahissements des continents par les eaux de l'Océan , et contre les désastres qui en seraient le résultat , n° 218. Ainsi donc , la théorie approfondie du système du monde assure aux races futures la paisible jouissance de tous les biens que nous possédons aujourd'hui ; il n'est soumis à aucune cause de destruction qui lui soit propre , et l'admirable constitution de l'univers est telle , que les mêmes

forces qui président à ses mouvements maintiennent l'équilibre et la stabilité de toutes ses parties, en sorte que le monde matériel semble renfermer les raisons suffisantes de sa durée et de sa permanence, comme chacun des êtres animés qui l'habitent porte en lui-même l'instinct de sa conservation.

254. La disposition du système solaire, qui assure sa durée, était aussi éminemment propre à faciliter les applications de l'analyse mathématique : admirable système, disait Lagrange, que Dieu semble avoir disposé tout exprès pour le calculer. Aussi il n'y a pas une des inégalités planétaires observées qui ne dérive de cette analyse avec une étonnante précision (1), souvent même il a été permis à la théorie de devancer l'observation et d'indiquer aux astronomes des inégalités nouvelles, qui par leur complication et la lenteur de leur développement n'auraient pu être découvertes par le seul secours de l'observation qu'après un grand nombre de siècles. Le géomètre aujourd'hui à l'aide d'un petit nombre de données qu'il emprunte à l'astronomie pratique, peut embrasser dans ses formules les mouvements de tous les corps célestes du système solaire, indiquer les états par lesquels il a passé depuis sa création, et prédire les changements qu'il subira dans les âges futurs. Toutes ces conséquences qui dérivent d'un principe aussi simple que général, Newton a osé les entrevoir ; ses successeurs leur ont

(1) On cite une seule inégalité à *longue période* dans le mouvement de la lune, dont la théorie n'a pu encore découvrir la cause ; mais l'existence même de cette inégalité n'est pas constatée d'une manière certaine par l'observation.

donné la rigueur de la démonstration, et, grâce à leurs travaux, la théorie du système du monde est devenue la plus sublime des sciences naturelles par son but, la plus complète par ses résultats.

Il semble que c'était déjà beaucoup que d'avoir dé mêlé les vraies lois des mouvements célestes et d'être parvenu à assigner, avec tant de probabilités qu'elles équivalent presque à la certitude, la cause qui les produit. On aurait pu croire que l'esprit humain devait en rester là; mais dans les sciences, comme en toutes choses, il est rare que le succès n'éveille pas l'ambition au lieu de la satisfaire. Maître du grand secret que la nature emploie pour donner la vie au système planétaire, cette gloire ne lui a pas suffi; il a cherché en remontant les âges s'il ne parviendrait pas à percer le mystère de sa formation même, et il a osé concevoir la pensée hardie d'assister, pour ainsi dire, au spectacle de la création du monde.

Buffon est le premier qui ait abordé une si vaste question, et qui ait considéré sous ce point de vue philosophique la constitution de l'univers. Ses idées sur la formation primitive des planètes et des satellites trouveraient peu de partisans aujourd'hui parmi les astronomes; mais on ne saurait se dispenser d'en faire mention: c'est un hommage que l'on doit à tous les génies créateurs, qui, par leurs erreurs mêmes, ont contribué à l'avancement des sciences en ouvrant la route aux spéculations plus heureuses de leurs successeurs.

Buffon suppose donc que le choc d'une comète, tombant obliquement sur le soleil, a projeté au loin un torrent

de la matière qui le compose, comme une pierre lancée dans un bassin fait jaillir l'eau qu'il contient. Ce torrent de matière en fusion s'est brisé en plusieurs parties, qui se sont arrêtées à différentes distances du soleil, suivant leur densité ou l'impulsion qu'elles avaient reçue; elles se sont ensuite réunies en globes par l'effet du mouvement de rotation, et en se condensant par le refroidissement elles sont devenues opaques et solides, et ont formé les planètes et les satellites.

Ce système explique très-simplement l'unité de direction du mouvement de translation des planètes, qui circulent toutes, comme on sait, d'occident en orient, autour du soleil; mais il n'en est pas de même du mouvement de rotation, et l'on ne trouve aucune raison pour que ce mouvement s'opère dans le sens du mouvement de translation plutôt que dans le sens contraire. Or, c'est l'un des faits les plus remarquables indiqués par l'observation p. 471, que cette identité du sens des mouvements de translation et de rotation des planètes et des satellites. On ne voit pas davantage pourquoi les orbites des planètes sont toutes à peu près circulaires et comprises dans une zone étroite de la sphère céleste, tandis que les comètes se meuvent dans des orbes très-excentriques et sous des inclinaisons quelconques à l'écliptique. L'hypothèse de Buffon sur l'origine des planètes et des satellites est donc fort éloignée de satisfaire aux principaux phénomènes qui caractérisent le système planétaire, et ne peut mériter aujourd'hui un examen sérieux.

255. Essayons avec Laplace de nous élever par une autre voie à leur véritable cause. Ce nouveau système a pour base les beaux travaux qu'a faits W. Herschell, à l'aide de

ses puissants télescopes , sur les nébuleuses. On sait que l'on appelle ainsi des taches blanchâtres que l'on aperçoit dans les différentes parties du ciel, dont elles occupent une grande étendue. En observant avec attention ces taches , on verra d'abord dans quelques-unes la matière nébuleuse confondue à l'état le plus diffus, et ne réfléchissant qu'une lumière faible et à peu près uniforme; dans d'autres cette matière se condense faiblement autour d'un ou de plusieurs noyaux peu brillants; dans quelques autres ces noyaux ont un éclat plus vif, relativement à la nébulosité qui les environne : ensuite les atmosphères de chaque noyau venant à se séparer par une condensation ultérieure, il en résulte des nébuleuses multiples, formées de noyaux brillants très-voisins, et enveloppées chacune d'une atmosphère. Enfin, un plus haut degré de condensation transforme toutes ces nébuleuses en étoiles. En groupant sous un même point de vue ces observations faites sur un grand nombre de nébuleuses différentes, Herschel suppose qu'elles représentent le travail successif qui s'opère sur un seul et même amas de matière nébuleuse, qui passerait de son état primitif de nébulosité complètement diffuse et de noyaux à peine lumineux à l'état d'étoiles les plus brillantes. Les progrès de la condensation qui opère cette transformation ne pourraient devenir sensibles pour nous qu'après un grand nombre de siècles; mais on peut les découvrir de cette manière en les suivant à la fois sur l'ensemble des nébuleuses répandues dans le ciel, de même qu'un naturaliste qui voudrait connaître les développements successifs des organes d'un être animé, les étudierait sur des individus de différents âges.

Puisque l'observation attentive des nébuleuses semble indiquer leur transformation en étoiles, à des époques plus ou moins reculées, on doit supposer par analogie que les étoiles existantes et le soleil lui-même étaient autrefois des amas de matière nébuleuse que la condensation a réduits à l'état où nous les voyons aujourd'hui. D'après cette induction, nous sommes conduits à considérer le soleil, à l'origine des choses, comme composé d'un noyau plus ou moins brillant, enveloppé d'une vaste atmosphère qui pouvait s'étendre d'abord, par l'effet d'une chaleur excessive, au delà des orbes de toutes les planètes, et que la condensation a resserrée successivement dans ses limites actuelles.

Cette atmosphère, que l'on peut supposer douée d'un mouvement de rotation autour de son centre de gravité, soit que ce mouvement résulte de l'attraction réciproque de toutes ses parties, soit qu'il lui ait été communiqué primitivement, a dû, en se condensant par le refroidissement, abandonner dans le plan de son équateur des zones de vapeurs composées de substances qui avaient besoin d'un froid plus intense pour revenir à l'état liquide ou à l'état solide. Ces zones ont dû commencer par circuler autour du soleil sous la forme d'anneaux concentriques, dont les molécules les plus volatiles ont formé la partie supérieure, et les molécules les plus condensées la partie inférieure.

Si toutes les molécules nébuleuses dont ces anneaux se composent avaient continué à se refroidir sans se désunir, elles auraient fini par former un anneau liquide ou solide. Mais la disposition régulière que devraient avoir pour cela toutes les parties de l'anneau et

qu'elles devraient conserver dans leur refroidissement, a dû rendre ce phénomène extrêmement rare. Aussi, le système solaire ne nous en offre-t-il qu'un seul exemple, celui des anneaux de Saturne. Généralement l'anneau a dû se briser en plusieurs fragments, qui ont continué à circuler à la même distance autour du soleil, et avec des vitesses à peu près égales, en même temps que, par l'effet de leur séparation, ils acquéraient un mouvement de rotation autour de leur centre de gravité respectif; et comme les molécules de la partie supérieure de l'anneau, c'est-à-dire les molécules les plus éloignées du centre du soleil, avaient nécessairement une vitesse absolue plus grande que les molécules de la partie inférieure qui en étaient plus rapprochées, le mouvement de rotation, commun à tous les fragments, a dû être toujours dirigé dans le même sens que celui du mouvement de translation.

Cependant, si après leur division l'un de ces fragments s'est trouvé assez supérieur aux autres pour les réunir à lui par son attraction, ils n'auront plus formé qu'une seule masse de vapeurs, qui, par le frottement continuél de toutes ses parties et les lois de l'équilibre des fluides combinées avec celles du mouvement de rotation, a dû prendre la forme d'un sphéroïde aplati aux pôles, et allongé dans le sens de son équateur. Voilà donc les anneaux de vapeur, abandonnés par les retraits successifs de l'atmosphère du soleil, transformés en autant de planètes à l'état de vapeurs circulant autour du soleil, et douées d'un mouvement de rotation dirigé dans le sens de leur révolution. Ce cas a dû être le plus commun; mais celui où les fragments de quelque anneau

auraient formé plusieurs planètes distinctes, animées de vitesses différentes, a pu aussi se réaliser; et les quatre planètes télescopiques, Cérès, Junon, Pallas et Vesta, découvertes au commencement de ce siècle, semblent en offrir un exemple; à moins que l'on n'admette, d'après Olbers, qu'elles sont les éclats d'une seule et même planète qu'une forte commotion intérieure a brisée.

Il est facile d'imaginer les changements successifs que le refroidissement doit amener dans les planètes dont nous venons d'indiquer la formation. En effet, chacune de ces planètes à l'état de vapeurs est en tout comparable à une nébuleuse de première création; elles doivent donc, avant d'arriver à l'état de fixité, passer par tous les degrés de transformation que nous venons de suivre dans le soleil. D'abord, la condensation de leur atmosphère formera autour du centre de la planète un noyau composé de couches superposées d'inégales densités, les matières les plus denses ayant dû par leur pesanteur se rapprocher du centre, et les plus volatiles gagner la surface; comme on voit dans un vase divers liquides se ranger les uns au-dessus des autres suivant leur pesanteur spécifique, pour arriver à l'état d'équilibre. L'atmosphère de chaque planète pourra, comme celle du soleil, en se retirant, abandonner derrière elle des zones de vapeurs qui formeront une ou plusieurs planètes secondaires, circulant autour de la planète principale comme la lune autour de la terre, et les satellites autour de Jupiter, Saturne et Uranus; ou bien qui formeront, en se refroidissant sans se diviser, une ceinture solide et continue, comme nous en avons un exemple dans l'anneau de Saturne. Dans tous les cas, le sens du

mouvement de rotation et de translation des satellites ou de l'anneau, devra être le même que celui du mouvement de rotation de la planète, et c'est ce qu'en effet l'observation confirme complètement :

L'étonnante coïncidence de tous les mouvements planétaires, phénomène qu'on ne saurait, sans enfreindre toutes les lois des probabilités, regarder comme un simple effet du hasard, se trouve donc résulter de la formation même du système solaire dans cette ingénieuse hypothèse : on voit encore pourquoi les orbites des planètes et des satellites doivent être peu excentriques et ne s'écarter que légèrement du plan de l'équateur solaire. Une harmonie parfaite entre la densité et la température de leurs molécules à l'état de vapeurs aurait rendu les orbites rigoureusement circulaires et les aurait fait coïncider avec le plan de cet équateur ; mais comme cette régularité ne pouvait exister entre toutes les parties de masses si considérables, il a dû en résulter les petites excentricités des orbites des planètes et des satellites, et leur déviation du plan de l'équateur solaire.

Lorsque dans les zones que l'atmosphère solaire abandonnait, il s'est trouvé des molécules trop volatiles pour s'unir entre elles ou aux planètes, elles doivent continuer à circuler autour de cet astre sans présenter aucune résistance sensible aux mouvements des corps planétaires, soit à cause de leur extrême rareté, soit parce que leur mouvement s'effectue dans le même sens que celui des corps qu'elles rencontrent. Ces molécules errantes doivent ainsi nous offrir toutes les apparences de la *lumière zodiacale*.

Nous venons de voir que la figure des corps célestes

était un résultat nécessaire de leur fluidité à l'origine des temps. Le phénomène singulier que nous présente l'égalité rigoureuse que l'observation indique entre les moyens mouvements de rotation et de révolution de chaque satellite, égalité qui rend invisible à jamais l'hémisphère de la lune qui nous est opposé, n° 240, est encore une conséquence très-simple de cette hypothèse. En effet, en supposant qu'une différence quelconque ait existé entre le moyen mouvement de rotation et de révolution de notre satellite lorsqu'il était encore à l'état de vapeurs ou à l'état fluide; l'attraction de la terre a dû d'abord allonger le sphéroïde lunaire dans le sens de son axe dirigé vers la terre. La même attraction a dû tendre à diminuer insensiblement la différence qui existait entre le mouvement de rotation et le mouvement de révolution de la lune, de manière à la renfermer entre d'étroites limites, condition suffisante pour que l'axe de son équateur dirigé vers la terre n'ait plus été assujéti qu'à une espèce de balancement périodique, constituant le phénomène de la *libration*. Si ces oscillations n'ont pu être reconnues jusqu'ici par l'observation, c'est qu'elles auront disparu dans la suite des temps par les résistances qu'elles ont éprouvées, comme les oscillations de l'axe terrestre dans l'intérieur de la terre, provenant de l'état initial du mouvement, ont été anéanties, et comme ont disparu enfin tous les mouvements des corps célestes qui n'ont pas une cause permanente.

256. Les principaux phénomènes du système planétaire s'expliquent donc avec une extrême facilité dans l'hypothèse que nous examinons; et si l'on ajoute que ces

transformations successives d'une masse nébuleuse, et l'abandon d'une partie de sa substance par le refroidissement, peuvent s'accorder avec tous les principes de la mécanique, elle acquerra un grand degré de vraisemblance. Dans cette hypothèse, la formation des planètes n'aurait pas été simultanée; elles ont été créées successivement à des siècles d'intervalles; les plus anciennes sont celles qui sont les plus éloignées du soleil; et les satellites sont d'une date plus récente que leurs planètes respectives. Peut-être, s'il nous était permis d'atteindre jusque là, pourrions-nous, par l'examen de la constitution de chaque planète, remonter à l'époque de sa formation, et assigner à chacune son âge dans cette chronologie de l'univers.

On voit encore que la vitesse du mouvement de translation de chaque planète telle qu'elle est aujourd'hui, doit peu différer de celle qu'avait le mouvement de rotation du soleil à l'époque où la planète s'est détachée de son atmosphère. Et comme le mouvement de rotation a dû s'accélérer à mesure que les molécules solaires se sont resserrées par le refroidissement pour que la somme des aires qu'elles décrivent autour du centre de gravité restât toujours la même, n° 174, il s'ensuit que le mouvement de révolution doit être d'autant plus rapide que la planète est plus voisine du soleil, comme l'observation l'indique. Il en résulte encore que la durée de la rotation soit du soleil, soit d'une planète, doit être plus courte que la durée de la révolution du corps le plus voisin qui circule autour de ces astres: c'est ce que l'observation confirme complètement, même dans les circonstances où la différence entre les durées des deux

mouvements doit être très-petite. Ainsi, l'anneau intérieur de Saturne étant très-voisin de la planète, la durée de sa rotation doit être presque égale, mis un peu plus longue que celle de la planète. Les observations d'Herschel donnent en effet 0^h,432 pour la durée de la rotation de l'anneau, et 0^h,427 pour celle de la planète n° 205 : comment donc ne pas admettre que cet anneau a été formé par la condensation de l'atmosphère de Saturne, qui jadis s'est étendue jusqu'à lui. Peut-être pourrait-on déduire des lois de la mécanique, d'après les dimensions actuelles du soleil et la durée connue de sa rotation, la relation qui devait exister entre le rayon vecteur de sa surface et le temps de sa rotation dans les différents états de concentration par lesquels il a passé. La troisième loi de Kepler, n° 107, ne serait plus alors un simple résultat de l'observation, elle se déduirait directement des lois primordiales de la formation des corps célestes.

Dans ce système, comme dans celui qu'avait proposé Buffon, la forme particulière des planètes, l'abaissement des pôles et le renflement de leur équateur ne sont qu'une conséquence rigoureuse des lois de l'équilibre des fluides, et l'on explique sans peine la plupart des phénomènes observés par les géologues dans la constitution du globe terrestre, qui paraîtraient inexplicables si l'on n'admettait pas que la terre et les planètes ont été originellement fluides.

257. Voyons maintenant quelle est l'origine et le rôle que cette hypothèse assigne aux comètes. Laplace les suppose étrangères au système planétaire, et il les regarde comme des amas de vapeurs formés de l'agglomération de la matière lumineuse répandue de toutes parts dans

l'univers et errant au hasard dans les différents systèmes solaires. Des comètes seraient ainsi, relativement au système planétaire, ce que sont les aérolithes par rapport à la terre, avec laquelle ils semblent n'avoir aucune connexion d'origine. Lorsqu'une comète s'approche assez des régions de l'espace que notre système occupe, pour entrer dans la sphère d'activité du soleil, l'attraction de cet astre combinée avec la vitesse acquise de la comète la force à décrire un orbe elliptique ou hyperbolique. Mais comme la direction de cette vitesse est absolument arbitraire, les comètes doivent se mouvoir dans tous les sens et dans toutes les parties du ciel.

Les orbites cométaires pourront donc avoir toutes les inclinaisons à l'écliptique, et cette hypothèse explique également bien la cause des grandes excentricités dont elles sont généralement affectées. En effet, si les courbes que les comètes décrivent sont des ellipses, elles doivent être très-allongées puisque leurs grands axes sont au moins égaux au rayon de la sphère d'activité du soleil, et nous ne devons apercevoir par conséquent que ceux de ces astres dont les excentricités sont très-grandes et dont la distance périhélie est peu considérable; les autres, à cause de leur petitesse en général, et de leur éloignement, seront toujours invisibles, à moins que la résistance de l'éther, l'attraction des planètes, ou d'autres causes inconnues, ne diminuent leur distance périhélie et ne les rapprochent de l'orbe terrestre. Les mêmes circonstances ont pu changer les orbites primitives de quelques comètes dans les ellipses dont les grands axes sont beaucoup moins considérables, et c'est ce qui sera arrivé probablement aux comètes périodiques de 1759,

1819 et 1832. Les lois du mouvement curviligne montrent d'ailleurs que l'excentricité de l'orbite dépend principalement de la direction du mouvement de la comète à son entrée dans la sphère d'activité du soleil; et comme ce mouvement est possible dans toutes les directions, il n'y a pas de limites fixées à la grandeur des excentricités des orbites des comètes.

Si, lorsque les planètes se sont formées, quelques comètes ont pénétré dans les atmosphères du soleil et des planètes, la résistance qu'elles en ont éprouvée a dû détruire graduellement les vitesses dont elles étaient animées; elles ont dû alors tomber sur ces corps en décrivant des spirales, et leur chute aura eu pour effet d'écarter les plans des orbites et des équateurs des planètes du plan de l'équateur solaire. C'est donc en partie à cette cause, et en partie à celles que nous avons développées plus haut, que l'on peut attribuer les légères déviations que nous y apercevons aujourd'hui.

258. Telle est en résumé l'hypothèse proposée par Laplace sur l'origine du système solaire. Cette hypothèse explique de la manière la plus satisfaisante les trois phénomènes les plus remarquables que nous présentent les mouvements planétaires.

1° Le mouvement des planètes dans le même sens et à peu près dans un même plan;

2° Le mouvement des satellites dans le même sens que leurs planètes;

3° La singulière coïncidence en direction des mouvements de rotation et de translation des planètes et du soleil qui dans les autres systèmes présenterait des difficultés inextricables.

Les phénomènes non moins remarquables de la petitesse des excentricités et des inclinaisons des orbes planétaires en sont aussi une conséquence nécessaire, tandis qu'on voit en même temps pourquoi les orbes des comètes s'écartent de cette loi générale et peuvent être très-excentriques, et avoir des inclinaisons quelconques au plan de l'écliptique. L'aplatissement de la figure des planètes, indiqué sur la terre par l'accroissement des degrés du méridien et par l'augmentation régulière de la pesanteur en allant de l'équateur aux pôles, n'est que le résultat de l'attraction de leurs molécules lorsqu'elles étaient encore à l'état de vapeurs, combinée avec la force centrifuge produite par le mouvement de rotation imprimé à la masse fluide. Enfin, parmi les phénomènes que les mouvements et la figure des corps célestes nous présentent, on n'en trouve pas un qui ne puisse s'expliquer avec une extrême facilité par la condensation successive de l'atmosphère solaire; et plus l'on approfondit toutes les circonstances de ce système, plus on est porté à en reconnaître la probabilité (1).

Sans doute, si comme Laplace le dit lui-même, une hypothèse qui n'est pas fondée sur le calcul ou sur l'observation, doit toujours être présentée avec une extrême défiance, celle-ci, on en convaincra, acquiert du moins, par la réunion et l'accord de tant de faits divers, tous les caractères de la vraisemblance. Mais ce qui surtout la distingue selon moi des systèmes ordinaires, c'est

(1) Je n'ai pu que résumer ici les idées de Laplace sur la formation du système solaire. C'est dans l'*Exposition du Système du monde* qu'on trouvera tous les développements qui peuvent donner plus de probabilité à son ingénieuse hypothèse.

l'identité qu'elle établit entre la formation du système solaire et celle des étoiles répandues avec tant de profusion dans le ciel.

Tous les faits sont liés entre eux dans la nature, tous découlent d'un petit nombre de lois générales et simples, et la tâche de l'homme de génie consiste à découvrir ces liaisons secrètes, ces rapports inconnus qui rattachent les uns aux autres des phénomènes qui pour le vulgaire ne paraissent avoir aucune analogie. En remontant ensuite d'un phénomène où la loi primitive est facile à saisir, à l'explication d'autres phénomènes où des circonstances particulières la compliquaient au point de la dérober à ses yeux, il les voit tous découler d'une même source, et le secret de la nature lui appartient. C'est ainsi que les lois du mouvement elliptique des planètes conduisirent Newton au grand principe de la pesanteur universelle, qu'il eût cherché en vain dans les phénomènes moins simples du mouvement de rotation de la terre, ou du flux et du reflux des mers. Mais ce grand principe une fois découvert, toutes les circonstances des mouvements planétaires furent expliquées jusque dans leurs plus petits détails, et la stabilité du système solaire ne fut plus elle-même qu'une conséquence rigoureuse de sa conformation, sans que, pour l'assurer, Dieu, comme le croyait Newton, soit jamais obligé de retoucher à son ouvrage. Laplace, en étendant à toutes les étoiles existantes, et par suite au soleil, le mode de condensation qui transforme les nébuleuses en étoiles, a su rattacher l'origine du système planétaire aux lois primordiales du mouvement, sans recourir à aucune hypothèse étrangère à celle de l'attraction. Il n'a

donc donné qu'une extension nouvelle à la grande loi de la gravitation universelle , qui probablement est le principe unique et suffisant de la création du monde physique comme elle est celui de sa conservation.

L'hypothèse de Buffon exigeait non-seulement la chute sur le soleil d'une comète aussi grosse que la somme des masses de toutes les planètes et de tous les satellites, ce qui est déjà passablement invraisemblable ; mais pour expliquer la formation des innombrables systèmes planétaires que l'imagination peut supposer autour de chaque étoile comme autour du soleil , il eût fallu concevoir la chute d'autant de nouvelles comètes , et la raison se refuserait bientôt à croire à des hasards si souvent répétés , et toujours renouvelés au gré des besoins qu'on en a. Le principe de la condensation des atmosphères des nébuleuses , au contraire , est général , et il a dû produire sur toutes les étoiles et sur toutes les planètes des phénomènes à peu près analogues.

Si les idées de Laplace sur l'origine du monde n'ont point encore acquis ce degré de certitude que l'appui du calcul et de l'observation peut seul donner , et sans lequel les plus beaux systèmes ne sont encore que de brillantes conjectures , rappelons-nous que la théorie de l'attraction avait été devinée par Képler (1) longtemps avant que Newton n'eût prouvé la vérité mathématique. Reportons les yeux en arrière , voyons le point d'où nous sommes partis , et ne désespérons pas des efforts de l'esprit humain. Peut-être est-il réservé à notre siècle d'accomplir enfin cette prédiction d'un philosophe

(1) *De stellâ Martis.*

de l'antiquité : « *Le temps viendra où les secrets les plus profonds de la nature nous seront dévoilés ; et la postérité s'étonnera que l'explication si simple de ces grands phénomènes nous ait été si longtemps cachée* (1). »

(1) Sénèque , Questions naturelles , livre vii.

FIN.

NOTES.

NOTE 1.

Formules pour convertir les ascensions droites et les déclinaisons en longitudes et latitudes, et réciproquement (page 75).

Soit dans la figure (105) ADOM l'équateur, ACBD l'écliptique, AB la ligne des équinoxes, L le lieu de la lune ou d'un astre quelconque, si l'on abaisse les arcs LH et LI respectivement perpendiculaires à l'équateur et à l'écliptique, LH sera la déclinaison de l'astre, AH son ascension droite comptée de l'équinoxe, LI sa latitude et A sa longitude.

La position de l'astre sur la voûte céleste est également déterminée par l'un ou l'autre système de coordonnées, mais comme on n'observe directement que l'ascension droite et la déclinaison, parce que les instruments qui serviraient à déterminer la longitude et la latitude, seraient trop difficiles à vérifier, on est obligé de convertir les ascensions droites et les déclinaisons observées en longitudes et en latitudes pour les introduire dans les calculs, c'est une opération dont l'usage est continu en astronomie.

Soient donc A l'ascension droite d'un astre, D sa déclinaison, l sa longitude, λ sa latitude, ω l'obliquité de l'écliptique en sorte qu'on ait : $AH = A$, $LH = D$, $Al = l$, $LI = \lambda$; $HA I = \omega$, les trois quantités A , D , ω étant données, il s'agit de trouver l et λ .

Pour cela joignons L et A par un arc de grand cercle et faisons $LA = \phi$ et $LAH = \psi$; dans le triangle LAH rectangle en H on aura :

$$\cos. \phi = \cos. A \cos. D; \quad \text{tang. } \psi = \frac{\text{tang. } D}{\sin. A} \quad (1)$$

L'angle $LAH = \theta$ étant ainsi connu on en conclura :

$$LAI = LAH + HAI = \theta + \alpha.$$

Maintenant dans le triangle LAI rectangle en I , l'hypoténuse $LA = \varphi$ et l'angle oblique $LAI = \theta + \alpha$ étant supposés connus, on aura :

$$\begin{aligned} \sin. \lambda &= \sin. \varphi \sin. (\theta + \alpha) \\ \text{tang. } l &= \text{tang. } \varphi \cos. (\theta + \alpha) \end{aligned} \quad (2)$$

Les équations (1) servent à déterminer les angles φ et θ , que l'on introduit ensuite avec leurs signes dans les équations (2). S'il s'agissait du soleil on aurait $\varphi = l$; $\lambda = 0$, $\theta = \alpha$, et les équations (1) donneraient simplement :

$$\cos. l = \cos. R \cos. D; \text{ tang. } D = \text{tang. } \alpha \sin. Al.$$

Les longitudes et les ascensions droites sont toujours positives et croissantes depuis 0 jusqu'à 360° ; les latitudes et les déclinaisons croissent seulement de 0 à 90° , elles sont boréales ou australes, c'est-à-dire positives ou négatives, selon que l'astre est situé au nord ou au midi de l'écliptique pour les premières, et de l'équateur pour les secondes.

Pour donner un exemple des formules précédentes, le 15 octobre 1819 on avait pour l'ascension droite et la déclinaison apparentes d'Aldebaran :

$$R = 4 \text{ h. } 16' 10'', 6 = 66^\circ 32' 39''; D = + 16^\circ 9' 29'', 13.$$

$$\begin{array}{ll} \cos. R \dots\dots\dots 9,5999289 & \text{tang. } D \dots\dots 9,4620001 \\ \cos. D \dots\dots\dots 9,9824961 & \text{; sin. } Al \dots\dots 9,9625432 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \cos. \varphi \dots\dots\dots 9,5824250 & \text{tang. } \theta \dots\dots 9,4994569 \\ \varphi = 67^\circ 31' 22'' & \theta = 17^\circ 31' 40'' \\ & \alpha = 23^\circ 27' 32,5 \end{array}$$

$$\alpha - \theta = 5^\circ 55' 52,5$$

$$\begin{array}{ll} \sin. \varphi \dots\dots\dots 9,9656867 & \text{tang. } \varphi \dots\dots 0,3832643 \\ \sin. (\alpha - \theta) \dots\dots 9,0142476 & \cos. (\alpha - \theta) \dots\dots 9,9976690 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \sin. \lambda \dots\dots\dots 8,9799343 & \text{tang. } l \dots\dots\dots 0,3809333 \\ \lambda = -5^\circ 48' 45'', 2 & l = 67^\circ 24' 50'', 2 \end{array}$$

Comme l'astre est compris entre le plan de l'écliptique et le plan

de l'équateur, sa déclinaison est boréale et sa latitude est australe.

On pourrait par des formules analogues convertir la longitude et la latitude d'un astre données par les tables astronomiques, en ascension droite et en déclinaison pour comparer sa position observée à sa position déduite de la théorie.

NOTE 2.

Sur les Parallaxes (page 93).

Lorsque la parallaxe horizontale d'un astre est connue, on peut aisément en déduire sa parallaxe correspondante à une hauteur ou à une distance *zénithale* quelconque. En effet nommons P la parallaxe horizontale ou l'angle OHC (*fig. 106*), R le rayon terrestre, D la distance de l'astre au centre de la terre, dans le triangle OHC on aura

$$1 : \sin. P :: D : R = D \sin. P.$$

Nommons p la parallaxe lorsque l'astre est en H' , et z la distance zénithale, ou ce qui revient au même, faisons $p = OH'C$ et $z = ZOH'$, dans le triangle COH' , en supposant que la distance $H'C$ de l'astre à la terre n'a pas varié, on aura :

$$\sin. p : \sin. (180^\circ - z) :: R : D,$$

d'où en observant que $\sin. (180^\circ - z) = \sin. z$ on tire

$$R = \frac{D \sin. p}{\sin. z}.$$

En comparant les deux valeurs de R on aura :

$$\sin. p = \sin. P \sin. z \quad (a)$$

Equation qui donnera la parallaxe correspondante à la distance zénithale z quand la parallaxe horizontale P sera connue.

Comme les arcs p et P sont généralement très-petits, on peut les substituer à leurs sinus, ce qui donne :

$$p = P \sin. z \quad (b)$$

C'est-à-dire que *la parallaxe de hauteur est le produit de la parallaxe horizontale, par le sinus de la distance au zénith ou par le cosinus de cette hauteur.*

La plus grande valeur de $\sin. z$ a lieu quand on a $z = 90^\circ$; alors $p = P$; c'est-à-dire que la plus grande valeur de la parallaxe d'un astre est celle qui a lieu quand il est à l'horizon.

L'équation précédente est celle qu'on applique ordinairement aux observations du soleil et des planètes; mais pour la lune il est plus exact de faire usage de l'équation (a) à cause de sa proximité de la terre, qui rend sa parallaxe très-forte, et ne permet pas, sans erreur sensible, de la supposer égale à son sinus. N° 50.

L'équation $R = D \sin. P$ montre comment on peut déterminer la distance d'un astre au centre de la terre en parties du rayon terrestre, lorsqu'on connaît par observation sa parallaxe horizontale. Pour un autre astre quelconque on aurait l'équation analogue $R = D' \sin. P'$ d'où l'on tire la proportion :

$$D : D' :: \sin. P' : \sin. P$$

Ou bien en substituant les arcs au sinus :

$$D : D' :: P' : P.$$

Les parallaxes horizontales de deux astres sont donc réciproques à leurs distances à la terre; c'est la proposition dont nous avons fait usage dans le texte n° 17.

La parallaxe d'un astre varie avec sa distance à la terre, elle augmente lorsqu'il se rapproche de nous, elle diminue lorsqu'il s'en éloigne. La parallaxe horizontale serait la même pour tous les lieux de la terre, si sa forme était exactement sphérique; mais comme la figure est celle d'un sphéroïde elliptique, on est obligé de tenir compte de son aplatissement dans la mesure des parallaxes, du moins pour la lune, car les autres corps célestes sont trop éloignés pour qu'il en résulte aucune correction sensible. On trouve dans la *Connaissance des temps* la parallaxe horizontale de la lune pour chaque jour à midi et à minuit, on l'obtient pour les autres heures par interpolation; cette parallaxe est relative aux lieux situés sur l'équateur terrestre, et se nomme par cette raison *parallaxe horizontale équatoriale*; il est facile d'en conclure la parallaxe ho-

horizontale relative à un lieu quelconque dont la latitude est donnée.

En effet soient P et P' les parallaxes horizontales relatives aux latitudes zéro et λ , R et R' les rayons terrestres qui leur correspondent, la distance de l'astre à la terre restant la même on aura : $R = D \sin. P$, $R' = D \sin. P'$ d'où :

$$\frac{R}{R'} = \frac{\sin. P}{\sin. P'} \text{ ou } \frac{R}{R'} = \frac{P}{P'}$$

Mais en nommant α l'aplatissement du globe, et les rayons terrestres diminuant de l'équateur au pôle, proportionnellement au sinus carré de la latitude n° 216 on a $R' = R. (1 - \alpha \sin.^2 \lambda)$ par conséquent :

$$P' = P (1 - \alpha \sin.^2 \lambda).$$

C'est-à-dire qu'il faudra diminuer la parallaxe équatoriale de $\alpha P. \sin.^2 \lambda$ pour avoir la parallaxe horizontale qui répond à la latitude λ (voy. la note p. 168). Si l'on adopte pour la mesure de l'aplatissement de la terre la fraction $\frac{1}{231}$, on la substituera à la place de α dans l'équation précédente qu'il sera facile ensuite de réduire en nombres.

La parallaxe horizontale de la lune à une latitude quelconque étant ainsi connue, on en conclura la parallaxe de hauteur par la formule (a). En ajoutant cette parallaxe à la hauteur zénithale observée, on aura la hauteur de l'astre tel qu'il serait vu du centre de la terre. La parallaxe du soleil varie peu, parce que les variations de ses distances à la terre sont peu considérables, et l'on peut, le plus souvent, regarder sa parallaxe comme constante et égale à sa valeur moyenne $8'', 5776$, p. 281.

La parallaxe changeant la position qu'auraient le soleil, la lune et les planètes relativement à un observateur placé au centre de la terre, et toutes les tables astronomiques étant calculées par rapport à ce centre, il est nécessaire de faire subir aux coordonnées qui déterminent les positions de ces astres des corrections convenables pour les réduire à ce qu'elles seraient si elles avaient été observées du centre de la terre. Nous avons déjà vu comment la parallaxe servait à déduire de la hauteur apparente d'un astre, sa hauteur vraie, et réciproquement, l'effet de la parallaxe altère également les ascensions droites, les déclinaisons, les longitudes et les latitudes; mais elle ne change ni l'azimuth, ni l'instant du passage de l'astre au méridien p. 94. On détermine par les formules de la

trigonométrie les variations qui en résultent dans chacune de ces quantités pour un astre dont la parallaxe horizontale est connue, en déduisant ensuite des données de l'observation les valeurs de ces corrections prises avec les signes que le calcul leur attribue, on aura l'ascension droite, la déclinaison, la longitude et la latitude vraies, c'est-à-dire telles qu'elles seraient vues du centre de la terre, et telles, par conséquent, qu'il est nécessaire de les avoir pour les comparer aux valeurs des tables.

Soit $\mathcal{A}'$ l'ascension droite d'un astre, D' sa déclinaison, L' sa longitude, et λ' sa latitude, vues par un observateur placé à la surface de la terre, désignons par les mêmes lettres non accentuées $\mathcal{A}$, D , L , λ les mêmes quantités relatives à un observateur placé au centre de la terre, et nommons respectivement π , π' , ω et ω' les effets de la parallaxe de l'astre sur son ascension droite, sa déclinaison, sa longitude et sa latitude, on aura :

$$\text{ascen. dr. appar. } \mathcal{A}' = \text{ascen. dr. vr. } \mathcal{A} + \pi,$$

$$\text{déclin. appar. } D = \text{déclin. vr. } D - \pi',$$

$$\text{long. appar. } L' = \text{long. vr. } L + \omega,$$

$$\text{latit. appar. } \lambda' = \text{lat. vr. } \lambda - \omega'.$$

Quant aux formules qui déterminent les arcs π , π' , ω , ω' , nous renverrons à l'excellent ouvrage de M. Francœur, intitulé *Astronomie pratique*, où l'on trouvera l'exposition complète de ces formules, avec des exemples qui serviront à en faciliter l'usage.

Le diamètre apparent d'un astre augmente ou diminue à mesure qu'il se rapproche ou s'éloigne de la terre; ses variations sont liées à celles de la parallaxe par une relation très-simple qu'il est facile de déterminer. En effet, si l'on nomme R le demi-diamètre apparent d'un astre dont la distance à la terre est D , c'est-à-dire l'angle sous lequel on apercevrait du centre de la terre le rayon r' de cet astre, dans le triangle rectangle formé par la droite qui joint le centre de la terre au centre de l'astre, par le rayon de cet astre et par la tangente à son disque, on aura :

$$\text{tang. } R = \frac{r'}{D}.$$

Mais en désignant par P la parallaxe horizontale de l'astre et par r le rayon terrestre, on a :

$$\sin. P = \frac{r}{D}.$$

Par conséquent en comparant ces deux équations :

$$\frac{\text{tang. } R}{\sin. P} = \frac{r'}{r}$$

Ou simplement en supposant très-petits les arcs R et P :

$$\frac{R}{P} = \frac{r'}{r}$$

Le second membre ne contenant aucune quantité variable on voit que le demi-diamètre vrai et la parallaxe horizontale d'un astre sont entre eux dans un rapport constant ; on peut donc déterminer ces deux quantités l'une par l'autre lorsque ce rapport est connu.

Le rayon de la lune est égal à 0,27293 ou $\frac{1}{4}$ à peu près de celui de la terre n° 50, donc relativement à cet astre :

$$\text{demi-diam. app. } \mathcal{C} = \frac{3}{11} \text{ paral. horiz.}$$

C'est par cette formule que sont calculés les demi-diamètres de la lune, qu'on trouve dans la *Connaissance des temps* ; ces demi-diamètres se rapportent à un observateur placé au centre de la terre, il faut leur faire subir une petite correction dépendante de la parallaxe pour en conclure le demi-diamètre de la lune, selon la position que l'observateur occupe sur le globe. Au reste, pour éviter les calculs que ces corrections exigent, on a construit des tables où on les trouve toutes calculées pour chaque distance donnée du centre de la lune au zénith de l'observateur.

Nous avons vu n° 43 comment on déterminait la parallaxe horizontale d'un astre par deux observations simultanées de sa hauteur, faites ou réduites au même méridien. Pour donner un exemple de ce calcul choisissons les observations suivantes faites pour déterminer la parallaxe de Mars.

Le 6 octobre 1751, la hauteur méridienne de Mars observée au cap de Bonne-Espérance, dans l'hémisphère austral et corrigée de la réfraction, était de $64^{\circ} 57' 33''$; en prenant le complément de cet angle on trouve $25^{\circ} 2' 27''$ pour la distance de la planète au zénith. La latitude ou la hauteur du pôle au cap Bonne-Espérance est de $33^{\circ} 55'$, dont le complément $56^{\circ} 5'$ est la distance du pôle au zénith qui, étant ajoutée à $25^{\circ} 2' 27''$, donne $81^{\circ} 7' 27''$ pour la distance de Mars au pôle austral le 6 octobre 1751 à midi :

en retranchant cet angle de 180° , on aura donc pour sa distance au pôle-nord au même instant $98^\circ 52' 33''$.

A la même époque la hauteur méridienne de Mars observée à Stockholm et corrigée de la réfraction, était de $21^\circ 45' 54''$, dont le complément $68^\circ 14' 6''$ donne la distance de la planète au zénith; la latitude de Stockholm est $59^\circ 21'$, dont le complément $30^\circ 39'$ est la distance du pôle au zénith; en ajoutant cette distance à $68^\circ 14' 6''$ on aura la distance de Mars au zénith de Stockholm, le 6 octobre 1751 à midi, égale à $98^\circ 53' 6''$.

La différence de cette distance à celle qui a été observée au cap est de $33''$, c'est la parallaxe de Mars correspondante à l'intervalle qui sépare les deux observateurs n° 43. Pour en conclure la parallaxe horizontale désignons par P cette parallaxe, et par h et h' les distances de l'astre L (*fig. 107*) au zénith dans les deux observations, on aura :

$$\text{pour la première..... } CLO = P \sin h.$$

$$\text{et pour la seconde..... } CLO' = P \sin h'.$$

Par conséquent :

$$CLO + CLO' = P (\sin. h + \sin. h')$$

Or $CLO + CLO'$ est l'angle sous lequel on voit du centre de l'astre L la distance OO' qui sépare les deux observateurs, c'est par conséquent la parallaxe observée que nous avons trouvée de $33''$, on aura donc pour calculer la parallaxe horizontale :

$$P = \frac{33''}{\sin. h + \sin. h'}$$

On a d'ailleurs par ce qui précède, $h = 25^\circ 2' 27''$, $h' = 68^\circ 14' 6''$, d'où l'on conclut $\sin. h = 0,42326$ $\sin. h' = 0,92871$, et par conséquent :

$$P = \frac{33''}{1,35197} = 24'', 4$$

C'est-à-dire que la parallaxe horizontale de Mars était le 6 octobre 1751 de $24'', 4$.

En substituant cette valeur dans l'équation $D = \frac{r}{\sin P}$, on trouve que la distance de cette planète à la terre était à la même époque de 8453,4 rayons terrestres.

NOTE 3.

Sur la détermination de la plus grande équation du centre du soleil par les observations (page 130).

Pour donner un exemple de ce calcul, je choisis les observations suivantes, faites en 1830. La longitude du soleil était de $9^{\circ} 46' 48''$, le 30 mars, $12^{\text{h}} 4' 4''$ temps moyen à Paris, et il approchait de sa plus grande équation, comme l'indiquait l'observation de son mouvement diurne, qui différait peu de son mouvement moyen tropique, ou de $59' 8''$, 33; le 2 octobre suivant, à $23^{\text{h}} 49' 9''$ la longitude du soleil était de $189^{\circ} 44' 25''$, et il se trouvait encore très-près de sa plus grande équation. La différence des deux longitudes est de $179^{\circ} 57' 47''$; et pour avoir celle des époques, il faut observer que, du 30 mars 12^{h} au 2 octobre 12^{h} , il y a 186 jours d'intervalle, la première observation était plus avancée de $4' 4''$, et la seconde de $11^{\text{h}} 49' 9''$, la différence est de $11^{\text{h}} 45' 5''$, qu'il faut ajouter à 186 jours pour avoir l'intervalle qui les sépare, ce qui donne 186j., 489641; en multipliant par ce nombre le moyen mouvement diurne $59' 8''$, 33, on aura le mouvement moyen du soleil dans l'intervalle des deux observations; cet arc retranché de son mouvement vrai dans le même espace de temps, est le double de la plus grande équation du centre, on trouve ainsi :

Moyen mouvement en 186j., 489641.	$183^{\circ} 48' 47''$
Mouvement vrai.	$179 \ 57 \ 47$
Différence.	$3 \ 51 \ 00$

ce qui donne pour la plus grande équation du centre... $1^{\circ} 55' 30''$. La valeur exacte de cette équation était, en 1830, de $1^{\circ} 55' 27''$, la différence de $3''$ tient à ce qu'il est difficile de déterminer avec précision l'instant où le soleil se trouvait dans sa plus grande équation, mais on arriverait très-près de l'exactitude en choisissant plusieurs observations du soleil, faites vers cet instant, et en fixant par interpolation le temps où son mouvement vrai par jour était égal au mouvement moyen tropique; la différence entre la valeur de la plus grande équation ainsi obtenue et la valeur véritable pourra

ainsi se réduire alors à une seconde, et les astronomes ont différents moyens de corriger cette petite erreur. Enfin, on pourra faciliter encore cette recherche en calculant directement par les formules du mouvement elliptique les valeurs des longitudes du soleil qui répondent à la plus grande équation du centre (ce qui est facile quand on connaît à peu près l'excentricité et la longitude de l'époque) et en choisissant, parmi les observations données, celles qui en approchent le plus. (Voir la note 5.)

NOTE 4.

Formules du Mouvement elliptique (page 338).

Soit, à un instant quelconque, M la position qu'une planète occupe sur l'ellipse ABCD décrite (fig. 108) autour du soleil S, et soit P le lieu d'un astre qui décrirait le cercle ABE circonscrit à l'ellipse d'un mouvement uniforme dans le même temps que la planète emploie à faire sa révolution périodique; enfin, soit N le point où la perpendiculaire abaissée de la planète M sur le grand axe de l'ellipse rencontre le cercle; ASM sera l'*anomalie vraie*, ou la distance angulaire de la planète au périhélie, AOP l'*anomalie moyenne* ou la distance de l'astre moyen au même point, et AON un angle auxiliaire qu'on nomme l'*anomalie excentrique*, et que les astronomes ont introduit dans les formules du mouvement elliptique pour en faciliter l'énoncé. Cet angle est, comme on voit, la distance angulaire au périhélie d'un astre qui décrirait le cercle ABE, en conservant toujours la même abscisse OQ que la planète. Il s'agit de déterminer les relations qui lient entre elles ces trois quantités.

D'après la loi de la proportionnalité des surfaces aux temps employés à les décrire, le secteur ASM est à la surface de l'ellipse comme le temps que la planète a mis à le tracer est à la durée de sa révolution totale; le secteur AOP est à la surface du cercle dans le même rapport, on a donc la proportion :

Sec. ASM : sec. AOP :: surf. de l'ellip. : surf. du cer. :: MQ : NQ.

Les secteurs ASM et ASN, qui ont même base AS, sont entre eux comme MQ est à NQ ; on a donc :

$$\text{sec. ASM} : \text{sec. ASN} :: \text{MQ} : \text{NQ}.$$

En comparant ces deux proportions, on en conclut :

$$\text{sec. AOP} = \text{sec. ASN} = \text{sec. AON} - \text{SON}.$$

Désignons par a le demi-grand axe de l'ellipse, par e son excentricité ; par u l'anomalie excentrique AON ; par nt l'anomalie moyenne AOM, n étant le moyen mouvement par jour, et t le temps écoulé depuis le passage au périhélie, on aura $AO = a$; $OS = ae$;

$$\text{NQ} = a \sin. u ; \text{AM} = ant, \text{ et par conséquent } \text{sect. AOP} = \frac{1}{2} a^2 nt ;$$

$\text{sect. AON} = \frac{1}{2} a^2 u$; $\text{SON} = \frac{1}{2} \text{SO} \times \text{NQ} = \frac{1}{2} a^2 e \sin u$; en substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et divisant par a^2 , on aura donc :

$$nt = u - e \sin. u \quad (1)$$

Nommons r le rayon vecteur SM, le triangle rectangle NOQ donne $r = \sqrt{\text{MQ}^2 + \text{SQ}^2}$; mais on a $\text{SQ} = a (\cos. u - e)$; et par la nature de l'ellipse $\text{MQ} = \text{NQ} \sqrt{1 - e^2} = a \sin. u \sqrt{1 - e^2}$, en substituant ces valeurs on trouve :

$$r = a (1 - e \cos. u) \quad (2)$$

Désignons par v l'anomalie vraie ou l'angle ASM, le triangle rectangle MSQ donne $\text{SQ} = r \cos. v$, on a d'ailleurs $\text{SQ} = a \cos. u - ae$, en égalant ces valeurs en vertu de l'équation (2), on aura donc :

$$\cos. v = \frac{\cos. u - e}{1 - e \cos. u}$$

On a d'ailleurs $\text{tang.}^2 \frac{1}{2} v = \frac{1 - \cos. v}{1 + \cos. v}$; en substituant pour $\cos. v$ sa valeur, on trouve :

$$\text{tang.} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \text{tang.} \frac{1}{2} u \quad (3).$$

Il serait facile, au moyen des formules précédentes, de déterminer le rayon vecteur, l'anomalie moyenne et l'anomalie vraie d'une planète, si l'on connaissait son anomalie excentrique, mais ordinairement c'est l'anomalie moyenne qui est donnée, parce qu'il est toujours facile de fixer à un instant quelconque la position d'un astre qui se meut uniformément sur une orbite circulaire. Il faudrait donc de la formule (1) déduire l'anomalie excentrique u en fonction de l'anomalie moyenne nt ; mais comme l'équation (1) est transcendante, on ne saurait y parvenir que par tâtonnement ou par des développements en série. Cette question, qui a longtemps occupé les géomètres, est ce qu'on a nommé le *problème de Kepler*, parce que cet astronome est le premier qui le proposa.

Heureusement la petitesse des excentricités des planètes a permis de le résoudre par des formules d'approximation qui ont toutes l'exactitude de formules rigoureuses. En éliminant l'anomalie u entre les équations (1) (2) et (3), on a trouvé ainsi :

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2} e^2 - \left(e - \frac{3}{8} e^3 \right) \cos. nt - \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{3} e^4 \right) \cos. 2 nt - \text{etc.}$$

$$v = nt + \left(2e - \frac{1}{4} e^3 \right) \sin. nt + \left(\frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{24} e^4 \right) \sin. 2 nt + \text{etc.}$$

L'angle v est la *longitude vraie* de la planète dans son orbite au bout du temps t ; nt est sa *longitude moyenne*; $v - nt$ ou la suite des termes $\left(2e - \frac{1}{4} e^3 \right) \sin nt + \text{etc.}$ est ce que les astronomes appellent l'*équation du centre*, c'est-à-dire ce qu'il faut ajouter à la longitude moyenne pour avoir la longitude vraie.

Nous supposons l'angle v compté du périhélie: si l'on voulait le compter d'un point quelconque de l'orbite, il suffirait de diminuer l'angle v de la constante ω , qui représenterait la longitude du périhélie comptée de la nouvelle origine de l'angle v ; et de même si, au lieu de compter le temps de l'instant du passage au périhélie, on voulait fixer son origine à une époque quelconque, on augmenterait l'angle nt d'une constante qui exprimerait l'anomalie moyenne de la planète à l'instant où commence le temps t ; on fait ordinairement cette constante égale à $t - \omega$, alors t représente la longitude moyenne de la planète au même instant, ou ce qu'on appelle n° 108 la longitude de l'époque; $nt + t$ est la longitude moyenne au bout du temps t , et $nt + t - \omega$ l'anomalie moyenne.

Pour calculer, d'après les formules précédentes, le rayon vecteur d'une planète, on substituera à la place des constantes a, n, e, n leurs valeurs qui se déduiront des observations, comme on le verra dans la note suivante; l'excentricité e étant en général une très-petite fraction, on négligera les puissances qui ne donneraient que des résultats insensibles. On voit ainsi que le calcul sera d'autant plus facile que l'excentricité de l'orbite sera moins considérable, ou que cette orbite se rapprochera davantage de la forme circulaire. En substituant ensuite pour t sa valeur correspondante à un instant donné, et exprimée en jours et fractions de jours, comptés à partir de l'époque que l'on a choisie, on aura la valeur du rayon vecteur qui s'y rapporte.

Quant à la longitude vraie v , le calcul se fera de la même manière; mais on observera, en outre, que comme cet arc doit être exprimé en degrés, minutes et secondes, il faudra pour l'homogénéité du calcul multiplier chacun des coefficients des termes périodiques qui entrent dans son expression, par l'arc égal au rayon qu'on trouve dans les tables de logarithmes de $57^{\circ} 17' 44'' 8$ ou de $206264'' 8$; cette réduction revient, comme il est aisé de s'en assurer, à diviser chacun des coefficients par $\sin. 1''$.

On pourra donc déterminer à chaque instant de cette manière la position de la planète dans son orbite elliptique; mais pour éviter le travail des substitutions numériques, on a calculé d'avance les variations de l'équation du centre et les corrections du rayon vecteur, en faisant varier l'anomalie moyenne par mois, par jour et par heure; en ajoutant aux tableaux qui renferment ces quantités, les petites corrections qui dépendent des perturbations que la planète peut éprouver de la part des autres corps célestes, on aura tout ce qui est nécessaire pour déterminer à chaque instant sa position. C'est ce qu'on appelle une *table* de la planète.

Les formules suivantes servent à calculer la plus grande équation du centre E lorsqu'on connaît l'excentricité e , et réciproquement :

$$E = 2e + \frac{11}{2^{4.3}}e^2 + \frac{599}{2^{10.5}}e^3 + \frac{17219}{2^{16.7}}e^4 + \text{etc.}$$

$$e = \frac{1}{2}E - \frac{11}{2^{4.3}}E^2 - \frac{587}{2^{16.3.5}}E^3 - \frac{40583}{2^{21.5.7.9}}E^4 - \text{etc.}$$

On aura ensuite pour déterminer l'anomalie excentrique et l'ano-

malie moyenne nt correspondantes à la plus grande équation du centre :

$$\nu = 90^\circ - \frac{3}{4} \frac{e^2}{\sin. 1''} - \frac{21}{128} \frac{e^3}{\sin. 1''} - \text{etc.}$$

$$nt = 90^\circ + \frac{5}{4} \frac{e}{\sin. 1''} + \frac{25}{384} \frac{e^3}{\sin. 1''} + \text{etc.}$$

Pour le soleil on a $e = 0,016786$ $n = 59'8'',33$, et l'on peut négliger les termes de l'ordre e^3 , qui sont insensibles; on trouve ainsi :

$$\nu = 90^\circ - 43'16'' = 89^\circ 16'44''; t = 921.53$$

La valeur de ν diffère peu de 90° , c'est-à-dire que les points qui répondent à la plus grande équation du centre, correspondent, à très-peu près, aux extrémités de la perpendiculaire au grand axe menée par le foyer, ce qui tient à la petitesse de l'excentricité de l'orbe solaire; en ajoutant l'anomalie ν à la longitude de l'époque, ou en l'en retranchant, on aura les longitudes des deux points qui répondent à la plus grande équation du centre; en doublant la valeur de t , on aura, à très-peu près, l'intervalle qui les sépare. (*Voir la note 3^e.*)

NOTE 5.

Sur la détermination des éléments elliptiques de l'orbite d'une planète par les observations (page 339).

Nous avons donné les moyens de trouver, par la seule observation, les premiers éléments de l'orbite du soleil, de la lune ou d'une planète; mais lorsqu'on suppose connues les lois du mouvement elliptique, il est aisé d'arriver, par le secours des observations et de la théorie réunies, à une connaissance très-approchée de la vraie valeur de ces éléments.

En désignant par ν la *longitude vraie* d'une planète rapportée au plan de son orbite, par n son moyen mouvement diurne, par ω la *longitude du périhélie*, par ϵ la *longitude de l'époque* et par e l'*excentricité* de son orbite, d'après ce qui a été dit dans la note précédente, on aura :

$$\nu = nt + \epsilon - 2e \sin (nt + \epsilon - \omega) + \frac{1}{4} e^2 \sin. 2 (nt + \epsilon - \omega) + \text{etc.}$$

Dans les premières recherches où il ne peut être question que d'une ébauche, pour ainsi dire, de l'orbite, on pourra toujours se borner aux deux premiers termes de cette série, même en supposant l'orbite très-excentrique. Lorsqu'il s'agira du soleil ou d'une planète dont l'excentricité est peu considérable, on pourra même n'avoir égard qu'à la première puissance de l'excentricité, ce qui simplifiera les calculs. Dans ce cas, en renversant la série, la formule précédente donnera :

$$nt + \epsilon = \nu + 2e \sin (\nu - \omega)$$

Cette équation contient quatre inconnues n , ϵ , e , ω , qu'il s'agit de déterminer. Or je remarque que, si à la place de ν et de t on substitue leurs valeurs données par les observations, on formera autant d'équations semblables à la précédente qu'il y a d'observations, et quatre d'entre elles suffiront par conséquent à la détermination complète des inconnues du problème. Il ne s'agira plus que d'éliminer entre ces équations les inconnues qu'elles renferment; mais comme elles sont transcendantes, cette élimination doit être faite d'une manière particulière pour que les formules qui en résulteront ne soient pas trop compliquées pour les calculs numériques. M. Bouvard a indiqué pour cela un procédé qui me paraît très-symétrique et d'un usage aussi commode que la question pouvait le comporter; il m'a montré les applications qu'il en a faites au soleil et à Mars, ce qui était un cas très-défavorable à cause de la grande excentricité de cette planète qui surpasse neuf centièmes, et il est parvenu ainsi, sans supposer aucune notion antérieure des éléments de ces astres, à une précision telle que, ses résultats comparés aux valeurs des éléments adoptés dans nos meilleures tables planétaires, n'ont présenté avec elles que de légères différences; de sorte qu'en supposant seulement quelques lieux du soleil ou d'une planète exactement connus, un travail de quelques heures conduirait de cette manière à des résultats que les astronomes n'ont obtenus que par des siècles d'observations et de soins assidus. J'aurais désiré que l'es-

pace me permet d'exposer ici en détail ce procédé de calcul et ses applications ; mais je me vois forcé de renvoyer à l'ouvrage de M. Francoeur déjà cité (*Astronomie pratique*) où l'on trouvera la méthode de M. Bouvard développée et appliquée à la détermination des éléments de l'orbite solaire.

Lorsqu'on a obtenu par les moyens que nous venons d'indiquer , ou de toute autre manière , des valeurs suffisamment approchées des éléments de l'orbite d'une planète ou du soleil , on peut aisément les amener à une exactitude aussi parfaite qu'il est possible de l'obtenir , au moyen des équations de condition fondées sur un très-grand nombre d'observations. Voici pour cela le procédé généralement employé par les astronomes :

En nommant V la longitude héliocentrique d'une planète déduite des tables, $\phi = n t + \epsilon - \omega$ son anomalie moyenne ; p, p' etc. les perturbations causées par les planètes m, m' etc. en n'ayant égard qu'au premier terme de l'équation du centre, on aura (voir la note 4^e) :

$$V = nt + \epsilon + 2e \sin \phi + pm + p'm' + \text{etc}$$

Si les divers éléments n, ϵ, ω , etc. étaient rigoureusement exacts, la valeur de V , calculée par cette formule, devrait s'accorder avec la longitude héliocentrique U donnée par l'observation ; s'il y a une différence entre ces deux valeurs, c'est donc que les éléments ont besoin de correction ; nommons respectivement $\delta n, \delta \epsilon, \delta \omega, \delta e$ les corrections que doivent subir les éléments n, ϵ, ω, e du mouvement elliptique de la planète troublée, et $\delta m, \delta m'$ etc., celles qu'il faudrait faire aux masses m, m' etc. des planètes perturbatrices, en ne tenant compte que des premières puissances de ces corrections qui sont nécessairement très-petites, on aura :

$$V - U = t\delta n + \delta \epsilon + 2\delta e \sin \phi + 2e\delta \phi \cos \phi + p\delta m + p'\delta m' + \text{etc.}$$

On substituera dans cette équation à la place des éléments ϵ, n, ω, e leurs valeurs données par la première approximation, en sorte qu'elle ne renfermera d'inconnues que les corrections arbitraires $\delta n, \delta \epsilon, \delta \omega, \delta e$, etc. Chaque observation fournira une équation de condition semblable , et si l'on en a réuni un grand nombre, on combinera les équations résultantes de manière à les réduire au même nombre que celui des corrections qu'il faut déterminer. Lorsqu'on en aura déduit leurs valeurs par les procédés ordinaires de l'élimination, on les appliquera aux éléments trouvés par une première approximation et l'on parviendra ainsi à leur donner toute l'exactitude dont ils sont susceptibles.

Les comètes ayant généralement des excentricités très-considérables, la méthode précédente ne pourrait pas être employée à déterminer les éléments de leurs orbites. Il faut, dans ce cas, recourir à des méthodes particulières. On suppose ordinairement que la comète se meut, pendant la courte durée de son apparition, dans une orbite parabolique, et trois observations fournissent alors plus de données qu'il n'en faut pour déterminer tous les éléments de son mouvement sur cette courbe. Les autres observations servent ensuite à corriger les premiers éléments ainsi obtenus. Mais nous ne pouvons qu'indiquer ici ce problème dont la solution exige des connaissances supérieures à celles que nous supposons aux lecteurs de cet ouvrage. (*V. Théorie analytique du système du Monde, tome 2^e, p. 1 et 486.*)

NOTE 6.

Sur la loi de la Gravitation (page 514).

Nous avons dit que la force qui retient chaque planète dans son orbite elliptique est constamment dirigée vers le centre du soleil, et que son intensité varie en raison inverse du carré de la distance de la planète à cet astre. Nous avons, dans le n^o 175, vérifié cette loi pour deux points particuliers de l'orbite, c'est-à-dire à l'aphélie et au périhélie, et nous avons dit qu'on pouvait, avec le secours de l'analyse, démontrer qu'elle s'observe de même dans toutes les positions de la planète. Comme cette proposition est de la plus haute importance dans la théorie de la gravitation, j'ai cru devoir en faire l'objet de cette note qui s'adressera uniquement aux personnes qui ont déjà des connaissances analytiques assez avancées.

L'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes est :

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

et le rayon de courbure, dans la même hypothèse, a pour expression (*voy. les éléments de calcul différentiel de Lacroix*) :

$$p = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{1}{2}}}{a^4 b^4}$$

Transportons l'origine des coordonnées au foyer F de la courbe (fig. 109) dont nous désignerons par e l'excentricité, ce qui suppose $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, désignons par r le rayon vecteur sur l'orbite et par v sa longitude comptée du périhélie, on aura :

$$x = r \cos. v + ae \quad ; \quad y = r \sin. v.$$

En substituant dans l'équation de la courbe ces valeurs et résolvant par rapport à r l'équation résultante, on trouve toute réduction faite :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos. v}.$$

C'est l'équation de la trajectoire rapportée à ses coordonnées polaires.

En substituant les mêmes valeurs dans l'expression de p , on aura :

$$p = \frac{\{a^2 - (a - r)^2\}^{\frac{1}{2}}}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} = \frac{r^2 \left\{ \frac{r}{a} - \frac{1}{a} \right\}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a(1 - e^2)}} \quad (1)$$

Expression du rayon de courbure en fonction du rayon vecteur r .

Si l'on appelle V la vitesse de la planète au bout du temps t , qu'on désigne par dt l'élément de la trajectoire décrit pendant l'instant dt on aura (voy. la note p. 488) :

$$V^2 = \frac{dr^2}{dt^2}.$$

Du foyer F comme centre avec un rayon égal à r décrivons l'arc de cercle MN qui coupe au point N le rayon vecteur FM' qui répond à la position M' de la planète; cet arc aura pour longueur $r dv$; et le secteur circulaire FMN que la planète décrit dans l'instant dt sera égal à $\frac{1}{2} r^2 dv$ et pourra être pris pour le secteur elliptique MFM' en négligeant la surface N'MM' infiniment petite du second ordre : les deux axes de l'ellipse sont a et $a \sqrt{1 - e^2}$, sa surface a pour expression $\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$; en nommant donc T le temps d'une révolution entière de la planète, en vertu de la première loi de Kepler, on aura :

$$r^3 d\nu : 2\pi a^3 \sqrt{1-e^2} :: dt : T.$$

d'où en faisant pour abrégé $c = \frac{2\pi a^3 \sqrt{1-e^2}}{T}$ on tire :

$$r^3 d\nu = c dt$$

Substituant la valeur de dt tirée de cette équation dans l'expression de V^2 et observant d'ailleurs que le triangle MNM' qu'on peut regarder comme rectiligne donne $MM'^2 = M'N^2 + MN^2$ ou bien :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\nu^2$$

On trouvera :

$$V^2 = c^2 \left(\frac{dr^2}{r^4 d\nu^2} + \frac{1}{r^2} \right)$$

L'équation de l'ellipse, en la différentiant, donne :

$$\frac{dr}{d\nu} = - \frac{a(1-e^2)e \sin \nu}{(1+e \cos \nu)^2} = \frac{r^2 e \sin \nu}{a(1-e^2)}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} V^2 &= \frac{c^2}{a^2(1-e^2)^2} \left\{ e^2 \sin^2 \nu + (1+e \cos \nu)^2 \right\} \\ &= \frac{c^2}{a^2(1-e^2)^2} (1 + 2e \cos \nu + e^2) \end{aligned}$$

Expression qui en substituant pour c sa valeur et faisant pour abrégé $\mu = \frac{2\pi a^3}{T^2}$, en vertu de l'équation de l'ellipse, pourra s'écrire ainsi :

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2)$$

Désignons par θ l'angle OMP que forme la normale au point M avec le prolongement du rayon vecteur r , dans le triangle $MM'N$, l'angle M sera égal à l'angle θ puisqu'ils sont tous deux compris entre des droites respectivement perpendiculaires ; on aura donc dans ce triangle :

$$\cos \theta = \frac{r d\nu}{ds}$$

On a par ce qui précède $ds = V dt$; en vertu de la valeur précédente de dt on aura donc :

$$\cos \theta = \frac{r dv}{V dt} = \frac{c}{r V}.$$

En substituant pour V sa valeur donnée par la formule (1) et faisant attention aux quantités que c et μ représentent, on trouvera :

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{r \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}} \quad (3)$$

Cela posé, on peut supposer que la planète pendant l'instant dt se meut sur le cercle osculateur au point M ; la force centrifuge dans le cercle a pour expression le carré de la vitesse du mobile divisé par le rayon du cercle, et d'après la théorie des forces centrales n° 173, cette force doit être égale à la puissance qui retient la planète dans son orbite décomposée suivant le rayon de courbure. Cette dernière force est dirigée suivant le rayon vecteur r et vers le centre de courbure n° 175; en nommant donc R son intensité et observant que θ étant l'angle que forme sa direction avec le rayon de courbure, il suffira, pour avoir sa composante suivant ce rayon, de la multiplier par $\cos \theta$, on aura ainsi l'équation de condition :

$$R \cos \theta = \frac{V^2}{r}$$

En substituant maintenant dans cette équation, à la place de r , de V et de $\cos \theta$ leurs valeurs données par les équations (1), (2) et (3), on trouve :

$$\frac{R \sqrt{a(1-e^2)}}{r \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}} = \frac{\mu \sqrt{a(1-e^2)}}{r^3 \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}}$$

d'où l'on tire enfin :

$$R = \frac{\mu}{r^2}$$

Cette expression de la force accélératrice R nous montre qu'elle est en tous les points de l'orbite réciproquement proportionnelle à la distance de la planète au soleil, loi que nous n'avions pu vérifier dans le texte que relativement au périhélie et à l'aphélie.

Pour une autre planète dont le demi-grand axe serait a' et le temps d'une révolution périodique T' , on aurait de même

$$R = \frac{\mu'}{r^2}$$

En faisant pour abréger $\mu' = \frac{4\pi a'^3}{T'^2}$; or d'après la troisième loi de Kepler, n° 107, on a :

$$T^2 : T'^2 :: a^3 : a'^3$$

d'où l'on tire :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2} \text{ et } \mu = \mu'$$

Par conséquent, les forces accélératrices de deux planètes également éloignées du soleil sont égales et leurs forces motrices sont indépendantes de leur nature particulière et proportionnelles à leurs masses.

C'est de cette manière que Newton fut conduit à la découverte de la loi de la gravitation universelle ; on a depuis trouvé dans les perfectionnements de la mécanique analytique, des moyens plus simples de la vérifier ; mais la marche que nous avons suivie dans cette note a l'avantage de montrer comment les théorèmes d'Huygens, sur la force centrifuge et les lois de Kepler, furent la source où Newton puisa la plus belle découverte dont puisse s'honorer l'esprit humain. L'étude des rapports par lesquels les progrès que nous avons faits dans les sciences s'enchaînent les uns aux autres, n'est peut-être ni moins utile ni moins curieuse que l'étude même des résultats qu'ils ont produits.

NOTE 7.

Sur les valeurs des masses planétaires (page 531).

Les valeurs des masses des planètes, celle du soleil étant prise pour unité, que nous avons rapportées dans cette page, sont celles qui résultent des évaluations les plus récentes et sans doute les plus

exactes. La masse de Mercure, la seule qu'on n'ait pu jusqu'ici déterminer d'une manière directe, est calculée empiriquement d'après une hypothèse arbitraire sur la loi des densités des différentes planètes, densités qu'on suppose ordinairement réciproques à leurs distances au soleil. Les masses de Vénus et de Mars résultent de la comparaison des inégalités que leur action produit dans le mouvement de la terre aux observations; la masse de la terre est déterminée par les observations du pendule qui bat les secondes à une latitude donnée; la masse de Jupiter est celle qui résulte, d'après la méthode exposée p. 319, des élongations de son quatrième satellite, observées en 1833 par M. Airy, alors directeur de l'observatoire de Cambridge. Les masses de Saturne et d'Uranus sont celles qui résultent de la discussion des observations qui ont servi de base aux tables de Jupiter par M. Bouvard, et de leur comparaison aux formules théoriques qui déterminent les inégalités de cette planète.

La valeur de la masse de Saturne a subi depuis quelques années une légère correction. M. Bessel, en répétant les observations faites par Pound, contemporain de Newton, sur les élongations du sixième satellite de Saturne, en a conclu que la masse de cette planète, celle du soleil étant prise pour unité, devait être égale à

$$\frac{1}{3501}.$$

Cette masse, selon M. Bouvard, serait égale à $\frac{1}{3512}$ (p. 532) : la petite différence de ces deux valeurs, qui résultent de moyens d'investigations si divers, semble prouver que nous connaissons, d'une manière au moins très-approchée, la véritable masse de Saturne.

NOTE 8.

Expression de la force perturbatrice du Soleil dans le mouvement de la lune (page 555 et suivantes).

Soit M la masse du soleil situé en S (fig. 99), soit T la terre, L la lune, et μ la somme de leurs masses. Faisons $ST = s$, $SL = l$, $LT = r$, et $STL = T$. D'après la loi de l'attraction le soleil attirera la terre avec une force $\frac{M}{s^2}$ dirigée suivant ST , et la lune avec une force $\frac{M}{l^2}$ dirigée suivant SL ; on peut décomposer cette dernière force en deux

autres, l'une dirigée suivant LT, et l'autre suivant LA parallèle à ST; d'après les règles du parallélogramme des forces, ces deux composantes seront respectivement : la première $\frac{M}{p} \cdot \frac{r}{l}$ et la seconde $\frac{M}{l^2} \cdot \frac{s}{l}$. Si l'on suppose la terre immobile, il faudra appliquer à la lune la force $\frac{M}{s^2}$ en sens contraire de sa direction. Les forces perturbatrices qui agissent sur la lune sont donc définitivement :

$$\frac{Mr}{p} \text{ dirigée suivant LT et } M\left(\frac{s}{p} - \frac{1}{s^2}\right) \text{ suivant LA.}$$

Pour développer ces expressions, supposons d'abord les trois corps dans un même plan. Abaissons la perpendiculaire LB sur ST, on aura : $SB = SL \cos. S$, l'angle S est toujours très-petit; en effet la parallaxe solaire est de $8''\frac{1}{2}$ à peu près, c'est l'angle sous lequel on apercevrait du centre du soleil le rayon terrestre; l'angle S, sous lequel on verrait du même point le rayon de l'orbe lunaire, serait donc de $8'\frac{1}{2}$ environ, puisque ce rayon est 60 fois plus grand que le premier. On peut donc supposer $\cos. S = 1$, et par conséquent $SB = SL$.

Nous aurons ainsi $SL = l = s - r \cos. T$ et $\frac{1}{p} = \frac{1}{s^2} + \frac{3r \cos. T}{s^4} + \text{etc.}$ En substituant cette valeur dans l'expression des forces perturbatrices, et observant que le rapport $\frac{r}{l}$ étant de $\frac{1}{400}$ environ, on peut négliger les termes qui dépendraient de son carré;

La force suivant LT se réduit à $\frac{Mr}{s^2}$, et la force suivant LA à $\frac{3Mr \cos. T}{s^2}$. Maintenant il s'agit de décomposer la force agissant suivant LA en deux autres, l'une agissant suivant le rayon LT prolongé, et l'autre perpendiculairement à ce rayon; il est clair par les règles du parallélogramme des forces, qu'il suffira pour avoir ces deux composantes de multiplier l'expression de la force donnée respectivement par le cosinus et le sinus de l'angle T qu'elle fait avec LT: ces deux forces seront ainsi :

$$\frac{3Mr \cos. T}{s^3} \cos. T = \frac{3 Mr}{2 s^3} (1 + \cos. 2T); \frac{3Mr \cos. T}{s^3} \sin. T.$$

La première doit s'ajouter à la force qui sollicite la lune suivant LT, et comme elle est dirigée en sens inverse, elle doit être prise avec un signe contraire; la seconde est la partie de la force perturbatrice qui agit dans le sens du mouvement de la lune dirigé suivant Lq; et comme elle tend à ralentir son mouvement, elle doit être prise avec le signe —; en nommant donc P et Q les deux forces dirigées suivant LT, et suivant la perpendiculaire à ce rayon, on aura :

$$P = \frac{Mr}{2s^3} (1 + 3 \cos. 2T); Q = - \frac{3Mr}{2s^3} \sin. 2T.$$

La force P est celle dont l'effet tend à augmenter ou à diminuer la force attractive de la terre, et la force Q celle qui tend à accroître ou à diminuer sa vitesse.

Dans les syzygies on a $T = 0$, ou $T = 180^\circ$, ce qui donne $P = - \frac{2Mr}{s^3}$

Dans les quadratures $T = 90^\circ$, ou $T = 270^\circ$ $P = \frac{Mr}{s^3}$

Ainsi donc la pesanteur de la lune est augmentée dans les quadratures; elle est diminuée dans les syzygies, et la diminution qui a lieu dans ces derniers points est double de l'augmentation qui a lieu dans les premiers. Ce qui est conforme à ce qui a été dit dans le texte. (Pages 557 et 562.)

L'expression $P = \frac{Mr}{2s^3} (1 + 3 \cos. 2T) = \frac{Mr}{s^3} (1 - 3 \cos. 2T)$ montre encore que l'action du soleil, pour diminuer la pesanteur de la lune, est nulle dans les quatre points de l'orbite, où l'on a $\cos. T = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire dans les quatre positions de la lune où l'angle T est de $54^\circ 44'$, $125^\circ 16'$, $234^\circ 44'$, et $305^\circ 16'$, et où elle se trouve par conséquent plus près des quadratures que des syzygies. (Page 557.)

La partie $\frac{Mr}{2s^3}$ de la force P représente la valeur moyenne de l'action qu'exerce le soleil sur la lune pour diminuer sa pesanteur vers la terre, puisque la partie multipliée par $\cos. 2T$, qui prend

toutes les valeurs comprises entre $+1$ et -1 est nécessairement périodique, et a pour valeur moyenne zéro. Or, d'après le théorème d'Huygens, les forces centrales de deux corps qui décrivent différents cercles, sont entre elles comme les rayons de ces cercles divisés par les carrés des temps périodiques (*voyez* p. 498); en désignant donc par m le rapport des durées des révolutions de la terre autour du soleil, et de la lune autour de la terre, et μ représentant la somme des masses de la terre et de la lune, on aura la proportion :

$$\frac{\mu}{r^3} : \frac{M}{s^3} :: r : m^2 s, \text{ ce qui donne } \frac{Mr}{s^3} = m^2 \cdot \frac{\mu}{r^3};$$

or comme on a à peu près $m = \frac{1}{13,4}$ on conclura de là :

$$- \frac{Mr}{2s^3} = - \frac{1}{358} \frac{\mu}{r^3};$$

c'est-à-dire que l'action moyenne du soleil diminue de $\frac{1}{358}$ l'attraction de la terre sur la lune, conformément à ce qui est dit à la page 556.

Enfin, dans les octants on a $T = 45^\circ$, et l'expression de Q donne :

$$Q = - \frac{3Mr}{2s^3} = - \frac{1}{119} \frac{\mu}{r^3}.$$

Ainsi la force qui tend à accroître la vitesse de la lune est triple dans les octants, ou dans les positions où la lune se trouve à 45° du soleil, de la force moyenne qui tend à diminuer sa pesanteur; et elle est égale à $\frac{1}{119}$ de la force centrale provenant de l'action de la terre, conformément à ce qui a été dit page 557.

NOTE 9.

Sur la figure de la Terre (page 609).

Nous avons supposé dans le n° 116 que la terre avait la figure d'un sphéroïde engendré par la révolution d'une ellipse qui tourne autour de son petit axe, et nous avons dit qu'on pouvait détermi-

ner, dans ce cas, l'aplatissement du sphéroïde d'après les valeurs de deux degrés du méridien mesurés à sa surface. Nous allons donner la formule qu'on emploie ordinairement à cette détermination; mais il faut d'abord rappeler l'expression du rayon de courbure dans les courbes elliptiques.

Soit ABCD (fig 110) l'ellipse qui représente le méridien terrestre, M un point dont la latitude est l , la normale MN en ce point sera la verticale ou la direction du fil à plomb, qui, prolongée, passe au zénith Z, et l'on aura $MNA = l$ puisque l'angle que forme la verticale avec l'axe des pôles mesure la latitude telle qu'elle est donnée par les observations célestes. Si la terre était sphérique, la normale en chaque point de sa surface serait partout la même et égale au rayon du globe; mais dans l'ellipse sa longueur varie avec la latitude, et nous devons chercher d'abord le rapport qui lie ces deux quantités.

Pour cela décrivons sur le grand axe AB un cercle AFB qui enveloppe l'ellipse; si du point M on abaisse la perpendiculaire MP sur l'axe AB et que par le point M', où cette ordonnée coupe le cercle, on mène la tangente M'T, qu'on joigne M et T, MT sera tangente à l'ellipse au point M, et par conséquent perpendiculaire à MN. Faisons l'angle M'OA = h , les angles M et M' étant droits, dans les triangles rectangles MNT, M'OT on aura $MTN = 90^\circ - l$, M'TO = $90^\circ - h$, et par conséquent :

$$\text{tang. MTP} = \cot. l = \frac{MP}{PT}$$

$$\text{tang. M'TP} = \cot. h = \frac{M'P}{PT}$$

En nommant a le demi-diamètre de la terre, et b le demi-axe des pôles, on a par la propriété de l'ellipse :

$$MP : M'P :: b : a$$

d'où l'on conclut :

$$\cot. h = \frac{a}{b} \cot. l$$

et par suite :

$$\sin h = \frac{b \sin. l}{\sqrt{1 + \cot^2. h}} = \frac{b \sin. l}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2. l}}$$

Ou bien en designant par e l'excentricité du méridien terrestre, ce qui donne $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$ et $b^2 = a^2 (1 - e^2)$:

$$\sin h = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin l}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 l}}$$

Cela posé, dans le triangle M'OP on a M'P = $a \sin h$, par conséquent :

$$MP = \frac{b}{a} M'P = a \sqrt{1-e^2} \sin h$$

M'P est le rayon du parallèle correspondant à la latitude l ; en nommant donc R ce rayon, et en substituant pour $\sin h$ sa valeur, on aura :

$$R = \frac{a(1-e^2) \sin l}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 l}}$$

Dans le triangle MPN on a d'ailleurs MP = MN $\sin l$, on aura donc :

$$MN = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 l}}$$

C'est l'expression de la normale correspondante à la latitude l .

Dans l'ellipse le rayon de courbure est égal au cube de la normale divisé par le carré du demi-paramètre; cette dernière quantité a pour expression $\frac{b^2}{a}$ ou $a(1-e^2)$, en nommant donc ρ le rayon de courbure qui répond à la latitude l , on aura :

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}$$

Cette valeur augmente avec la latitude l , la courbure du méridien terrestre diminue donc de l'équateur aux pôles; le rayon ρ a sa plus petite valeur à l'équateur, on a alors $\rho = a(1-e^2)$; il est à son maximum aux pôles, et l'on a $\rho = a \sqrt{1-e^2}$. Or, comme les arcs qui correspondent à un même nombre de degrés sur différents cercles sont proportionnels aux rayons de ces cercles, et qu'on peut toujours supposer que de très-petits arcs elliptiques se confondent sensiblement avec les arcs correspondants de leurs cercles osculateurs, il en résulte que les degrés du méridien terrestre doivent

aller en croissant de l'équateur aux pôles, si la terre a, comme nous l'avons supposé dans ce qui précède, la figure d'un sphéroïde aplati vers les pôles; le contraire aurait lieu dans le cas de l'ellipsoïde allongé dans le même sens n° 214.

Les expressions précédentes sont rigoureuses et ce sont celles que l'on emploie ordinairement dans la théorie de la figure de la terre (V. Traité de Géodésie par M. Puissant); mais elles se simplifient dans le cas où l'on suppose ϵ une très-petite quantité, comme cela a lieu relativement au méridien terrestre. En effet on peut alors les développer en séries ordonnées par rapport aux puissances de ϵ^2 et négliger les puissances supérieures à la seconde. En introduisant dans ces formules à la place de l'excentricité ϵ , l'aplatissement α du sphéroïde, c'est-à-dire le rapport de la différence des deux axes de l'ellipsoïde au plus grand de ces axes, on aura $\alpha = \frac{a-b}{a}$; on

ad'ailleurs $\epsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$; la comparaison de ces deux expressions donne, aux quantités près que nous négligeons, $\epsilon^2 = 2\alpha$; et l'on trouvera ainsi :

$$\rho = a(1 - 2\alpha)(1 + 3\alpha \sin^2 l)$$

Les rayons de courbure croissent donc, comme nous l'avons dit, de l'équateur aux pôles, et leurs variations sont proportionnelles au carré du sinus de la latitude.

Soit c la longueur d'un degré du méridien mesuré à la latitude l , en nommant π le rapport de la circonférence au diamètre, 2π sera la circonférence dont c mesure un degré; on aura donc $2\pi\rho = 360c$. Soit de même c' la longueur d'un degré du méridien mesuré à la latitude l' , l'on aura $2\pi\rho' = 360c'$, d'où, en substituant pour ρ et ρ' leurs valeurs, on tire :

$$\frac{c}{c'} = \frac{1 + 3\alpha \sin^2 l}{1 + 3\alpha \sin^2 l'}$$

En résolvant cette équation par rapport à α on aura :

$$\alpha = \frac{c' - c}{3(c \sin^2 l' - c' \sin^2 l)}$$

Cette formule a été donnée pour la première fois par Maupertuis. On voit qu'il suffit de connaître deux degrés du méridien mesurés à des latitudes différentes, pour en déduire l'aplatissement terrestre.

Pour donner une application de cette formule, choisissons le degré mesuré par Bouguer à l'équateur, et en France par Delambre. D'après le tableau de la page 622 on a :

$$\begin{aligned} c &= 110582^{\text{m}}, 1 & \varphi &= 1^{\circ} 31' 0'', 50 \\ c' &= 111131^{\text{m}}, 2 & \varphi' &= 45^{\circ} 4' 18'', 05 \end{aligned}$$

d'après ces valeurs on trouve :

$$c' - c = 549^{\text{m}}, 1; 3 (c \sin^2 l' - c' \sin^2 l) = 166054^{\text{m}}, 40$$

Par conséquent :

$$\alpha = \frac{549, 1}{166054, 4} = \frac{1}{302, 41}$$

Ainsi les deux degrés précédents nous donnent une valeur de α très-approchée de la fraction $\frac{1}{107}$, qui résulte pour l'expression de l'aplatissement terrestre de la théorie des inégalités lunaires.

L'aplatissement α étant déterminé, on aura la valeur du demi-diamètre a de l'équateur par l'équation :

$$a = \frac{\frac{360^{\circ}}{2\pi} c}{(1-2\alpha)(1+3\alpha \sin^2 l)}$$

Et l'on en conclura le demi-axe des pôles par l'équation $b = a(1-\alpha)$: d'après les valeurs précédentes de α , c , l on trouve :

$$\begin{aligned} a &= 6377787^{\text{m}} \\ b &= 6356700 \end{aligned}$$

Si l'on voulait faire concourir à la détermination de l'aplatissement un nombre quelconque de degrés du méridien, mesurés à la surface du sphéroïde terrestre, il faudrait reprendre l'équation $2\pi r = 360 c$, qui en substituant pour r sa valeur donne :

$$c = \frac{a\pi}{180} (1-2\alpha)(1+3\alpha \sin^2 l)$$

ou bien, en négligeant les quantités de l'ordre α^2 et faisant pour abrégé :

$$m = \frac{a\pi}{180} (1-2\alpha); n = \frac{3\alpha a\pi}{180}$$

simplement :

$$e = m + n \sin^2 l$$

Cette équation nous montre que les degrés croissent comme les rayons de courbure de l'équateur aux pôles, proportionnellement au carré du sinus de la latitude n° 216; m représente la longueur du degré à l'équateur et n l'excès du degré du pôle sur celui de l'équateur.

En substituant dans l'équation précédente à la place de e et l leurs valeurs relatives à chaque lieu d'observation, on aura autant d'équations qu'il y a de degrés mesurés; en combinant ensuite ces équations par la méthode des moindres carrés, méthode qui consiste, comme on sait, à déterminer les inconnues du problème de manière à ce que la somme des carrés des erreurs qu'on a pu commettre dans les observations, soit un *minimum*, on réduira ces équations à un nombre égal à celui des arbitraires qu'elles renferment, c'est-à-dire à deux équations au moyen desquelles on déterminera les deux coefficients m et n , et l'on en déduira la valeur de α ; en effet on a à très-peu près :

$$\frac{n}{m} = \frac{3 \alpha}{1 - 2 \alpha} = 3 \alpha$$

C'est de cette manière que nous avons trouvé la valeur de α rapportée dans le texte.

Voici le calcul. D'après les données rapportées dans le tableau page 612, on forme les équations suivantes :

$$\text{à l'Equateur } 110582^m, 1 - m - n 0^m, 00070 = e^{(0)}$$

$$\text{dans l'Inde } 110628^m, 6 - m - n 9^m, 05144 = e^{(1)}$$

$$\text{en France } 111131^m, 2 - m - n 0^m, 50125 = e^{(2)}$$

$$\text{en Suède } 111488^m, 5 - m - n 0^m, 83890 = e^{(3)}$$

En désignant par $e^{(0)}$ $e^{(1)}$ $e^{(2)}$ $e^{(3)}$ les erreurs dont les mesures des degrés sont susceptibles.

D'après les règles connues il faut multiplier chacune de ces équations par le coefficient de l'indéterminée m qu'elle renferme,

et faire la somme des équations résultantes ; ce coefficient étant l'unité , on trouve simplement :

$$4 m + n 1^m, 39229 - 443830^m, 4 = 0$$

En multipliant de même chaque équation par le coefficient de n et égalant leur somme à zéro , j'ai trouvé :

$$m 1^m, 39229 + n 0^m, 95765 - 155006^m, 27 = 0$$

L'élimination de m et n entre ces deux équations donne :

$$m = 110578^m, 54; n = 1089^m, 036$$

On aura donc généralement pour la longueur du degré à la latitude l :

$$c = 110578^m, 54 + 1089^m, 04 \sin^2 l$$

et par suite

$$\text{aplatissement } a = \frac{1}{304,6}$$

$$\text{demi-diamètre de l'équateur } a = 6377284^m$$

$$\text{demi-axe des pôles } b = 6356641^m$$

Ce sont les valeurs rapportées dans le texte, page 622.

NOTE 10.

Des variations de la pesanteur et de la longueur du pendule à la surface de la terre.

La longueur l du pendule qui bat les secondes dans un lieu dont la latitude est λ , a pour expression, p. 601 :

$$l = m + n \sin^2 \lambda$$

m et n étant deux quantités inconnues qu'il faut déterminer par l'observation. m représente , comme on voit , la longueur du pen-

dale quand $\lambda = 0$ ou sous l'équateur, et n l'excès du pendule au pôle sur le pendule de l'équateur. Deux observations doivent suffire en général pour déterminer ces deux arbitraires; si l'on en a réuni un plus grand nombre, on formera autant d'équations de condition qu'il y a de longueurs du pendule mesurées à différentes latitudes, et, en les combinant par la méthode des moindres carrés, comme on l'a fait dans la note précédente, on les réduira à deux équations au moyen desquelles on déterminera les inconnues m et n . En prenant les nombres rapportés page 624, et notamment e, e_1, e_2 , etc. les erreurs dont les observations sont susceptibles, on aura :

$$m + n \, 0^m,00000 - 0^m,990564 = e$$

$$m + n \, 0,56672 - 0,993867 = e_1$$

$$m + n \, 0,84829 - 0,995325 = e_2$$

Ces équations, réduites par la méthode des moindres carrés, donnent les suivantes :

$$m + n \, 0^m,47167 - 0^m,993252 = 0$$

$$m + n \, 0,73552 - 0,994741 = 0$$

d'où l'on tire :

$$m = 0^m,990590; \quad n = 0^m,005643$$

On aura donc généralement pour déterminer la longueur du pendule à secondes dans un lieu dont la latitude est λ :

$$l = 0^m,990590 + 0^m,005643 \sin.^2 \lambda.$$

Ce sont les valeurs dont on a fait usage dans le texte pour déterminer l'aplatissement du sphéroïde terrestre.



TABLE ANALYTIQUE

DES MATIÈRES

CONTENUES DANS CET OUVRAGE.

NOTA. Les chiffres indiquent les articles.

A.

Aberration. Mouvement apparent des corps célestes, qui résulte du mouvement de la terre et de la transmission successive de la lumière qu'ils nous envoient. Son effet est de nous faire voir les astres dans une position différente de celle qu'ils occupent réellement dans le ciel. Nos 25 et 71.

Achromatiques (lunettes), se dit des lunettes construites avec des verres composés de manière à ne pas produire d'iris. N° 17.

Accélération des fixes. C'est le temps que les étoiles anticipent chaque jour sur le retour du soleil au méridien : elle est de 3'55",9 en temps moyen solaire. N° 40.

Aérolithes. Pierres qui se forment dans l'atmosphère, ou qui la traversent en tombant sur la terre. Nos 6 et 61.

Âge de la lune; nombre de jours écoulés depuis la nouvelle lune.

Aire. Surface engendrée par le

rayon secteur d'une planète ou d'un satellite autour du centre de son mouvement.

Almageste. Ouvrage astronomique dû à Ptolémée; c'est le traité le plus complet sur cette science que nous ait transmis l'antiquité. N° 24.

Amplitude. Arc de l'horizon compris entre les vrais points de l'orient ou du couchant, et le centre d'un astre à l'instant où il perce l'horizon. L'amplitude est *ortive* ou *occase*, selon qu'elle se rapporte au lever ou au coucher d'un astre.

Angle horaire (d'un astre). C'est l'angle formé au pôle par le méridien du lieu et le cercle de déclinaison qui passe par cet astre; ou ce qui revient au même, c'est la distance de l'astre au méridien mesurée sur l'équateur.

Anneau de Saturne. On appelle ainsi un corps solide, opaque, très-mince, situé à peu près dans le plan de l'équateur de Saturne, et qui l'environne comme une ceinture. Ce phénomène est unique dans notre système planétaire. Nos 98, 99, 100.

Année tropique. C'est l'intervalle que met le soleil à revenir au même équinoxe ou au même solstice. C'est l'année qu'on emploie pour la mesure du temps dans les usages de la vie civile. N° 31. *Année sidérale,* c'est l'intervalle compris entre les retours du soleil à la même étoile. L'année sidérale est de 20'22" plus longue que l'année tropique. N° 40.

Annuulaire (éclipse). V. ce mot.

Anomalie, distance angulaire d'une planète à son périhélie ou à son aphélie. Elle prend le nom d'*anomalie vraie*, d'*anomalie moyenne* ou d'*anomalie excentrique* selon le mouvement que l'on suppose à la planète. N° 38.

Anomalistique se dit de la révolution d'une planète comptée depuis son passage au périhélie, jusqu'à son retour au même point. N° 75.

Antarctique (opposé à l'ourse), se dit du pôle sud ou austral.

Antipodes, lieux ou peuples diamétralement opposés sur le globe.

Aphélie, point de l'orbite d'une planète où elle est dans sa plus grande distance du soleil.

Aplatissement de la terre on d'une planète, c'est l'excès du diamètre de son équateur pris pour unité sur l'axe des pôles.

Apogée, point de l'orbe lunaire ou de l'orbite apparente du soleil le plus rapproché de la terre.

Apparent se dit du lieu d'un astre tel que nous l'observons; pour en déduire le lieu vrai il faut corriger le lieu apparent des effets de la *réfraction*, de l'*aberration*, de la *parallaxe*, et de la *nutation*. N° 149.

Apsides, terme générique pour désigner les deux points de l'orbite d'une planète où elle est dans sa plus grande ou sa plus petite distance au centre de son mouvement. L'*aphélie* est l'apside supérieure; le *périhélie* l'apside inférieure, la ligne

passant par le centre de l'orbite et qui joint ces deux points s'appelle la *ligne des apsides*.

Arctique, du mot grec *ἄρκτος*, ourse. constellation située dans la partie septentrionale du ciel. *Pôle arctique*, c'est l'extrémité nord de l'axe de la terre. *Cercle arctique*, celui que décrit le pôle de l'écliptique par son mouvement diurne.

Argument se dit de l'arc qui entre sous le signe périodique d'une inégalité donnée. N° 190.

Argument de la latitude, c'est la distance d'une planète à son nœud comptée dans le plan de son orbite.

Ascension droite d'un astre, c'est l'arc de l'équateur compris entre le méridien qui passe par cet astre et le lieu mobile de l'équinoxe, ou le premier point du signe *ariès*. Les ascensions droites se comptent dans le sens du mouvement du soleil depuis 0° jusqu'à 360°. N° 21.

Astéroïdes, nom donné aux planètes télescopiques *Vesta*, *Juno*, *Cérès* et *Pallas*. N° 104.

Atmosphère substance gazeuse de nature diverse qui entoure la terre, le soleil et d'autres corps célestes. Il n'existe pas, n° 60, d'atmosphère autour de la lune.

Attraction ou gravitation, propriété de la matière, en vertu de laquelle tous les corps de la nature tendent incessamment les uns vers les autres. N° 178.

Aurore, lueur qui précède le lever du soleil. *Aurore boréale* ou *australe*, vive lumière que l'on aperçoit quelquefois vers les régions polaires.

Austral synonyme de *méridional*, opposé au nord.

Axe de la terre ou d'une planète est une ligne imaginaire autour de laquelle paraît s'exécuter son mouvement de rotation; les extrémités de cet axe se nomment les *pôles*, et

le plan passant par le centre de l'astre qui lui est perpendiculaire, forme son *équateur*.

Axe du monde, c'est la droite autour de laquelle paraît s'exécuter la révolution diurne de la sphère céleste. L'axe du monde n'est que l'axe de la terre prolongé jusqu'à sa réunion avec le ciel. N° 2.

Azimuth, c'est l'arc compris entre le point nord de l'horizon et le lieu du lever ou du coucher d'un astre. L'azimuth est toujours le complément de l'amplitude. N° 2.

B.

Bissextile, épithète que l'on donne à l'année qui a un jour de plus que les années ordinaires. Il y a une année bissextile tous les quatre ans. N° 160.

Bolides, météores lumineux qui ont ordinairement la forme de globes de feu qui traversent l'atmosphère avec une rapidité plus ou moins grande. N° 61.

Boréal synonyme de septentrional situé du côté du nord. *Pôle boréal*, *hémisphère boréal*, *latitude boréale*, etc.

C.

Calendrier, classification du temps en périodes propres à en faciliter la conversion en jours, n° 59. *Calendrier Julien*, n° 160. *Grégorien*, n° 161.

Canicule, en langage vulgaire, c'est le temps des grandes chaleurs; on la compte ordinairement du 22 juillet au 23 août; c'est l'intervalle que le soleil emploie à traverser le signe du lion.

Cardinaux, épithète donnée aux quatre points qui divisent l'horizon en parties égales. N° 1.

Carré d'un nombre, c'est le produit de ce nombre par lui-même.

Catalogue (d'étoiles), registre sur lequel sont inscrites les positions des principales étoiles pour une époque donnée. N° 24.

Centre de gravité, point par lequel passe la résultante de toutes les forces parallèles appliquées à un corps ou à un système de corps. N° 174.

Centrifuge (force), tendance qu'a un corps mu sur une orbite curviligne à s'éloigner du centre de courbure. Nos 63 et 173.

Centripète (force), c'est la force qui attire un corps vers le centre de son mouvement; son effet est toujours opposé à celui de la force centrifuge. On donne à ces forces le nom générique de *forces centrales*. N° 173.

Cercle, figure plane terminée par une circonférence dont tous les points sont également éloignés d'un point intérieur nommé *centre*. *Cercles de la sphère*, ce sont ceux dont les plans passent par le centre de la sphère; on les désigne aussi simplement par le nom de *grands cercles*; par opposition on appelle *petits cercles* ceux dont les plans ne passent pas par le centre. *L'équateur*, le *méridien*, *l'écliptique*, etc., sont des *grands cercles*; les *cercles polaires* et les *deux tropiques* sont des *petits cercles*.

Cercle répétiteur, instrument destiné à mesurer les angles avec la même précision qu'on pourrait espérer d'un instrument construit sur de beaucoup plus grandes dimensions. N° 222.

Cercle de réflexion, voyez *Sextant* et *Octant*.

Cérès, planète télescopique découverte en 1801. N° 104.

Changeantes, on donne cette épithète à certaines étoiles qui varient

de grandeur et d'éclat, dans des périodes de temps déterminées. N° 11.

Chronomètre, instrument qui sert à mesurer le temps.

Circompolaires, épithète qu'on donne aux étoiles voisines du pôle et qui ne s'abaissent jamais sous l'horizon dans nos climats.

Climats, zones qui divisent la surface de la terre de l'équateur au pôle. N° 34.

Colures, se dit de deux grands cercles de la sphère qui se coupent à angles droits aux pôles du monde et qui passent, l'un par les points équinoxiaux et l'autre par les points solsticiaux, c'est-à-dire par les points où l'écliptique touche les deux tropiques.

Collimation (ligne de). C'est la position de l'axe optique d'une lunette lorsqu'elle répond au zéro du cercle gradué sur lequel elle est fixée. L'erreur de *collimation* sur la lunette méridienne, est l'erreur qui peut résulter de ce que l'axe optique de la lunette ne coïncide pas exactement avec la verticale, lorsqu'on l'a dirigée au zénith de l'observateur ou qu'il incline vers l'est ou vers l'ouest lorsqu'on vise les points nord ou sud de l'horizon.

Comètes, astres qui parcourent le ciel dans toutes les directions, tantôt du nord au sud, tantôt de l'est à l'ouest, etc.; elles sont comme les planètes soumises à des lois immuables et décrivent autour du soleil des ellipses en général très-allongées, n° 4; leur nature, n° 128; leurs perturbations, n° 207.

Complément d'un arc ou d'un angle, c'est la différence de cet arc ou de cet angle à 90°.

Configuration, situation de plusieurs astres les uns par rapport aux autres.

Conjonction, situation de deux astres qui ont même longitude,

quelle que soit d'ailleurs leur latitude. La lune est en conjonction à l'instant de la nouvelle lune.

Connaissance des temps éphémérides publiées chaque année en France, par les soins du bureau des longitudes.

Constellation, groupe d'étoiles auquel on a donné un nom particulier emprunté à la mythologie, à l'histoire, au règne animal, ou à des objets d'une utilité pratique dans les arts et dans les sciences. N° 7.

Cosinus, ligne trigonométrique, c'est la partie du rayon comprise entre le pied du sinus d'un arc et le centre de la circonférence. Le cosinus d'un arc est égal au sinus du complément de cet arc; ainsi le cosinus de 50° est la même chose que le sinus de 40°.

Cosmique (lever ou coucher), c'est le lever ou le coucher d'un astre qui se trouve à l'horizon en même temps que le soleil.

Cotangente, ligne trigonométrique, c'est la tangente du complément d'un arc donné. La cotangente de l'arc de 50° est la même chose que la tangente de l'arc de 40°.

Crépuscule, lumière qui succède au coucher du soleil ou qui précède son lever et qui est produite par la réfraction des rayons solaires dans l'atmosphère de la terre. N° 147.

Crown-glass, verre qui entre dans la composition des lunettes achromatiques. N° 17.

Cube d'un nombre, c'est le produit de ce nombre multiplié deux fois par lui-même; ainsi 27 est le cube de 3.

Culmination, passage d'une étoile ou d'une planète au méridien.

Cycle. Période de temps après laquelle les révolutions d'un astre recommencent dans le même ordre.

Cycle lunaire ou *nombre d'or*, période de 19 ans qui ramène les nou-

velles et pleines lunes aux mêmes jours de l'année solaire, et par conséquent aux mêmes points de l'écliptique que 19 ans auparavant, n° 53 et 163. *Cycle solaire*, période de 28 ans, après laquelle les jours du mois reviennent aux mêmes jours de la semaine, n° 165.

D.

Déclinaison, distance d'un astre à l'équateur; elle a pour mesure l'arc de méridien compris entre cet astre et le plan de l'équateur. La déclinaison varie de 0 à 90°, elle est australe ou boréale selon que l'arc est situé au sud ou au nord de l'équateur. On nomme *cercle de déclinaison*, c'est-à-dire, servant à mesurer la déclinaison, tout grand cercle de la sphère céleste passant par les pôles du monde. N° 21.

Décours de la lune, temps pendant lequel son disque éclairé va en décroissant, intervalle compris entre la pleine lune et la nouvelle lune suivante. N° 52.

Degré, c'est la 360^e partie de la circonférence.

Densité d'un corps, c'est la quantité de matière qu'il renferme sous un volume donné. Le rapport des densités de deux corps peut ainsi différer beaucoup de celui de leurs dimensions, c'est ce qui a lieu pour les planètes comparées entre elles et au soleil. On suppose ordinairement que les densités des planètes diminuent proportionnellement à leurs distances au soleil; cependant Vénus et Uranus font exception à cette règle, n° 183. *Densité moyenne* de la terre, n° 218.

Diamètre d'un cercle, ligne menée par le centre et dont les deux extrémités aboutissent à la circonférence. Le *diamètre apparent* d'un astre est l'angle sous lequel nous l'observons; le *diamètre vrai* est

cet angle corrigé des effets de la réfraction et de la parallaxe, c'est-à-dire tel qu'il serait vu par un observateur placé au centre de la terre, s'il n'y avait pas d'atmosphère. N° 35.

Diaphragme. Cloison circulaire que l'on introduit dans les lunettes pour arrêter les rayons irrégulièrement réfléchis par les parois du tube. N° 15.

Dichotôme. Se dit de la lune lorsque la moitié de son disque est éclairée et l'autre moitié dans l'ombre; c'est ce qui a lieu dans les *quadratures*.

Digression. C'est la distance angulaire d'une planète au soleil vue de la terre. Ce mot s'emploie spécialement pour les planètes inférieures Mercure et Vénus. La plus grande digression a lieu quand la ligne menée du centre de la terre à la planète est tangente à l'orbite de cette dernière. N° 78.

Direct (mouvement), se dit du mouvement d'un astre dirigé dans le même sens que le mouvement apparent du soleil, c'est-à-dire de l'occident à l'orient, suivant l'ordre des signes du zodiaque.

Disque. Surface visible d'un astre.

Diurne. Se dit de tout ce qui a rapport au jour. *Mouvement diurne* d'un astre, est le nombre de degrés, minutes et secondes qu'il paraît décrire pendant la durée d'un jour. *Mouvement diurne* de la terre, est la révolution qu'elle accomplit chaque jour sur son axe. N° 63.

E.

Éclipse. Disparition d'un astre produite par l'interposition d'un corps opaque entre l'observateur et cet astre. Telles sont les éclipses de lune et de soleil; celles des satellites de Jupiter et de Saturne, etc. N° 55, 90 et 97.

Écliptique. Grand cercle de la

sphère dans le plan duquel s'opère le mouvement apparent du soleil ou plutôt le mouvement annuel de la terre. N° 12. C'est à ce plan que les astronomes rapportent les orbites des autres corps célestes. Il est incliné de $23^{\circ} 28'$ au plan de l'équateur, mais cette inclinaison est soumise à une petite variation de $0''4885$ à peu près par an. N°s 39 et 233. On lui a donné le nom d'écliptique parce que le soleil et la lune ne peuvent s'éclipser que lorsqu'ils se trouvent à la fois dans ce plan. N° 55.

Éléments d'une planète. Ce sont six quantités qui déterminent la figure et la position de son orbite elliptique, et le lieu de la planète sur cette orbite à un instant donné. Ces quantités se déduisent de l'observation. N° 108.

Ellipse. L'une des courbes qui résultent de l'intersection d'un cône par un plan et que par cette raison on a nommées *sections coniques*. N° 36.

Élongation. Distance angulaire d'une planète au soleil, ou d'un satellite au centre de sa planète, pour un observateur placé au centre de la terre. Cet angle est toujours moindre que 90° pour les planètes situées entre la terre et le soleil; il est alors synonyme de *digression*. Il varie de 0° à 180° pour les planètes plus éloignées du soleil que la terre. N° 21.

Émerison. C'est le moment où un satellite sort de l'ombre de la planète où il était plongé; et celui par conséquent où finit l'éclipse.

Épacte d'une année. C'est l'âge de la lune au commencement de cette année. N°s 52 et 163.

Éphémérides. Nom donné aux recueils astronomiques qui contiennent les lieux des corps célestes calculés pour tous les jours de l'année.

Épicycle. Petit cercle dont le centre se meut sur la circonférence

d'un cercle plus grand. C'est en supposant les planètes en mouvement sur des épicycles, que les anciens expliquaient leurs stations et leurs rétrogradations apparentes. N° 79.

Époque. On nomme l'époque d'une planète, le lieu qu'elle occupe à un instant déterminé que l'on prend pour celui d'où l'on commence à compter le temps. N° 108.

Équateur. Grand cercle de la sphère perpendiculaire à la ligne des pôles ou à l'axe du monde. L'intersection de ce plan avec la surface de la terre forme l'équateur terrestre. L'équateur partage le globe et la voûte céleste en deux hémisphères égaux, l'un nommé *hémisphère boréal*, l'autre *hémisphère austral*. N° 2.

Équation. Terme généralement usité en astronomie pour désigner la correction qu'il faut faire subir au mouvement d'un astre déterminé d'une manière approximative pour avoir son mouvement vrai.

Équation du centre. Désigne spécialement ce qu'il faut ajouter à la longitude moyenne pour avoir la longitude vraie, c'est-à-dire la correction à faire au mouvement calculé dans une orbite circulaire pour avoir le mouvement dans l'ellipse. N° 38.

Équation du temps. Différence entre le temps vrai marqué par le retour du soleil au méridien et celui que marqueraient les retours au même plan, d'un astre qui parcourrait l'équateur d'un mouvement uniforme dans l'intervalle d'une année tropique. N°s 40 et 155.

Équatorial ou machine parallactique. Instrument à l'aide duquel on peut suivre un astre dans tous les points de sa révolution diurne. N° 22.

Équinoxe. Temps auquel le soleil traverse l'équateur pour passer de l'hémisphère austral, dans l'hémi-

sphère boréal, et réciproquement. On nomme *points équinoxiaux* ou simplement *équinoxes*, les deux points d'intersection de l'écliptique et de l'équateur. N° 30. L'équinoxe du printemps est désigné par le premier point du signe du zodiaque *aries*. C'est de là que sont comptées toutes les *ascensions droites* et les *longitudes des astres*.

Est ou *Orient*, l'un des quatre points cardinaux, celui où le soleil se lève le jour de l'équinoxe.

Établissement d'un port. C'est l'heure de la pleine mer dans ce port le jour de la syzygie. N° 248.

Été. L'une des quatre saisons de l'année; elle commence au solstice d'été le 21 juin et finit à l'équinoxe d'automne le 23 septembre.

Étoiles. Points brillants qui parsèment la voûte céleste quand le soleil est sous l'horizon. Elles sont douées d'une lumière propre comme le soleil, et paraissent situées à des distances immenses de la terre. Elles coexistent généralement entre elles la même configuration, ce qui les a fait nommer *étoiles fixes* ou simplement *fixes* pour les distinguer des astres qui ont un mouvement propre. N° 3. *Étoiles changeantes*. N° 8. *Étoiles doubles*. N° 10 et 26. *Étoiles filantes*. N° 6.

Évection, la plus grande des inégalités du mouvement de la lune après l'équation du centre et la plus anciennement connue. N° 51.

Excentricité, distance du centre d'une ellipse au foyer, divisée par son grand axe.

F.

Faculae. Points de la surface du soleil, d'un éclat plus vif que le reste du disque. N° 44.

Figure des corps célestes, N° 212.

Figure de la terre, N° 220. *Figure des anneaux de Saturne*, N° 100.

Flint-glass. Espèce de verre qui entre dans la composition des objectifs achromatiques. N° 17.

Flux et reflux. Mouvement périodique qui s'observe dans les mers d'une grande étendue. N° 243.

Force. Terme employé en mécanique pour désigner toute cause qui tend à troubler l'état de repos ou de mouvement d'un corps. *Force d'inertie*, N° 168. *Force accélératrice*. N° 171. *Force centrifuge*, N° 173, etc.

Foyers d'une ellipse. Points remarquables situés sur son grand axe à égale distance du centre. N° 36.

Foyer d'une lentille, point où se réunissent, après leur réfraction, les rayons parallèles qui la traversent. *Foyer d'une lunette*, foyer commun de l'objectif et de l'oculaire. N° 15.

G.

Géocentrique. Vu du centre de la terre. Le lieu *géocentrique* d'une planète, est sa longitude et sa latitude telles que l'observateur les verrait s'il était placé au centre de la terre.

Gnomon. Obélisque ou corps vertical quelconque, projetant une ombre derrière lui; cette ombre en tombant sur la méridienne fait connaître le passage du soleil au méridien. Les anciens employaient le gnomon à mesurer les hauteurs et les déclinaisons de cet astre. N° 156.

Gravité ou gravitation. Force qui attire les corps célestes les uns vers les autres. Voyez *Attraction*. N° 178.

H.

Hauteur d'un astre. C'est la distance de cet astre à l'horizon, me-

surée sur le cercle vertical qui passe par son centre et le zénith de l'observateur. N° 2.

Héliaque. Se dit du lever ou du coucher d'une étoile qu'on aperçoit le matin à l'horizon, un peu avant le lever du soleil, ou le soir un peu après son coucher. Le lever cosmique précède le lever héliaque, le coucher cosmique au contraire suit le coucher héliaque. V. *cosmique*.

Héliocentrique. Vu du centre du soleil. Le lieu héliocentrique d'un astre est la position qu'occuperait cet astre relativement à un observateur placé au centre du soleil. N° 75.

Héliomètre. Instrument destiné à mesurer les diamètres du soleil et des planètes avec plus d'exactitude qu'on ne le fait par le moyen du micromètre ordinaire.

Hémisphère. Moitié de la sphère.

Hesper ou *Vesper.* Un des noms de Vénus lorsqu'on l'aperçoit le soir après le coucher du soleil. N° 82.

Hiver. L'une des quatre saisons; elle commence au solstice d'automne le 22 décembre, et finit à l'équinoxe du printemps le 20 ou le 21 mars.

Horizon réel. C'est l'intersection de la sphère céleste par un plan perpendiculaire à la direction du fil à plomb. N° 1. *Horizon rationnel* ou géocentrique, c'est le grand cercle de la sphère mené parallèlement à l'horizon réel. La différence est insensible pour les étoiles, pour les planètes elle est égale à leur parallaxe horizontale.

Horloge astronomique. N° 20.

I.

Inclinaison de deux plans. Angle qu'ils comprennent entre eux; il a pour mesure l'angle que forment les

perpendiculaires élevées sur chacun des deux plans.

Indiction. Période arbitraire de 15 années introduite par les Romains dans le calendrier. N° 165.

Inégalités. On donne ce nom aux irrégularités qui écartent le mouvement de la lune, du soleil, et des planètes, des lois du mouvement elliptique. N° 51, 114 et 185.

Intercalation. Introduction d'un jour intercalaire dans les années bissextiles. L'*Intercalation grégorienne* est celle qui a été prescrite par le pape Grégoire XIII, lors de la réforme du calendrier en 1582. N° 161.

Interpolation. Procédé employé par les astronomes pour déterminer un résultat intermédiaire entre certains résultats déduits de l'observation ou du calcul.

Immersion. Entrée dans l'ombre, commencement d'une éclipse de la lune, d'un satellite, ou d'une étoile occultée par la lune.

Irradiation. Effet de lumière qui agrandit le disque des astres par l'impression vive que leur lumière produit sur l'organe de la vue. Elle est surtout sensible pour les étoiles qui n'ont, dans les lunettes, aucun disque apparent, et sont semblables à des points brillants.

Isochrone, de même durée. Se dit des oscillations d'un pendule très-peu écarté de la verticale. N° 20 et 172.

J.

Jour, division du temps. *Jour vrai,* intervalle entre deux retours successifs du soleil au méridien. *Jour moyen,* celui qui serait marqué par deux de ses retours successifs au méridien, s'il était mu uniformément dans le plan de l'équateur. *Jour sidéral* ou *astronomique,* intervalle entre les retours successifs de la

même étoile au méridien. Le jour sidéral est de $3^h 55^m 9^s$ (temps moyen) plus court que le jour moyen solaire. N° 40.

Juno, planète télescopique, découverte en 1804. N° 104.

Jupiter. La plus grosse de toutes les planètes; elle est située entre Saturne et Uranus, n° 88. Ses satellites, n° 90. Ses inégalités, n° 190.

K.

Kepler (lois de). C'est le nom qu'on donne aux trois principes généraux qui régissent les mouvements planétaires, et qui sont la base de toute l'astronomie théorique. N° 107

L.

Latitude d'un astre, c'est sa distance à l'écliptique, mesurée sur le grand cercle qui passe par le centre de l'astre, et par les pôles de l'écliptique. La latitude varie comme la déclinaison de 0° à 90° ; elle est boréale ou australe selon celui des deux hémisphères dans lequel l'astre est situé. Tout cercle passant par les pôles de l'écliptique, se nomme *cercle de latitude*, c'est-à-dire servant à mesurer la latitude, n° 24. *Latitude terrestre* est la distance d'un lieu du globe à l'équateur; elle a pour mesure l'arc de méridien compris entre le plan de l'équateur et le zénith de l'observateur. La latitude est toujours égale pour chaque lieu de la terre à la hauteur du pôle. N° 134.

Lenûlle, verre, convexe des deux côtés et de fort peu d'épaisseur, employé dans la construction des lunettes.

Lettres dominicales servant à marquer le dimanche dans le calendrier perpétuel. N° 164.

Levant. Voyez *Est* ou *Orient*.

Libration, état de balancement d'un corps qui fait de légères oscillations autour d'une position moyenne. *Libration de la lune*, phénomène par lequel la lune nous montre et nous dérobe tour à tour quelques parties de sa surface situées vers ses bords. N°s 60 et 240.

Longitude d'un astre, c'est l'arc compris sur l'écliptique entre le cercle de latitude qui passe par son centre et l'équinoxe du printemps, ou le premier point d'Aries. Les longitudes se comptent comme les ascensions droites, depuis 0° jusqu'à 360° dans le sens du mouvement du soleil ou selon l'ordre des signes du zodiaque. La longitude et la latitude d'un astre ne se déterminent pas par l'observation directe, elles se déduisent de l'ascension droite et de la déclinaison observées, par les formules trigonométriques.

Longitude terrestre, distance angulaire du méridien d'un lieu au méridien qui sert de point de départ. La longitude terrestre varie de 0° à 180° , elle est orientale ou occidentale, selon que le lieu est situé à l'est ou à l'ouest du premier méridien. N° 139.

Lucifer, nom donné à Vénus quand elle paraît le matin avant le lever du soleil.

Lumière. Décomposition de la lumière solaire, n° 17. Vitesse de la lumière, n° 118. *Lumière zodiacale*, clarté très-faible visible principalement vers le mois de mars, après le coucher du soleil, et qu'on suppose produite par la réflexion de ses rayons dans l'atmosphère très-rare qui l'environne. N° 45.

Lunaison. Espace de temps qui s'écoule entre deux pleines lunes consécutives.

Lune. Satellite de la terre dont elle est éloignée de 60 rayons terrestres, ou de 86,000 lieues envi-

ron. Elle fait sa révolution autour de notre planète en 27 jours et demi; sa révolution synodique ou relative au soleil, est de 29 jours et demi, n° 49. Ses phases, n° 52, ses inégalités, n° 51 et 193. Son atmosphère est insensible, n° 61. Son influence sur les saisons et sur les êtres organisés, n° 62. Lune rousse, *idem*.

Lunette astronomique, instrument qui sert à perfectionner la vision, et à en étendre la portée. N° 15.

M.

Machine parallactique, voyez *équatorial*.

Marées. Mouvements périodiques des eaux de la mer qui couvre et abandonne successivement deux fois en vingt-quatre heures une partie de ses rivages. *La marée est montante* quand la mer semble envahir le continent, ce mouvement se nomme le *flux*; elle est descendante quand la mer paraît se retirer sur elle-même, c'est ce qu'on nomme le *reflux*. Cause des marées, n° 180; moyen de les calculer, n° 247. *Marées atmosphériques*, oscillations de l'atmosphère provenant des mêmes causes que celles de l'Océan, n° 249.

Mars, planète située entre la terre et les planètes télescopiques. N° 85.

*Mercur*e, celle des planètes qui est la plus rapprochée du soleil, elle fait sa révolution en 87 jours. N° 81.

Méridien, grand cercle de la sphère passant par les pôles du monde et par conséquent perpendiculaire à l'équateur. Il marque le point culminant des courbes que décrivent les étoiles dans leur mouvement diurne. *Le méridien terrestre* est la trace du méridien céleste sur la surface de la terre. N° 2 et 23.

Micromètre, petit cercle portant

des fils mobiles, que l'on introduit dans l'intérieur des lunettes, et qui sert à mesurer les diamètres des astres.

Micromètre extérieur, instrument qui sert à lire sur le limbe d'un cercle gradué des divisions plus petites que celles qui y sont marquées. N° 16.

Midi ou Sud, un des quatre points cardinaux de l'horizon, celui vers lequel le pôle austral est dirigé.

Mois, douzième partie de l'année.

Mois lunaire, temps que la lune emploie à revenir à la même longitude comptée de l'équinoxe immobile. Sa durée est de 27 jours 7 heures 43' 5". *Mois synodique*, temps qu'elle emploie à revenir en conjonction avec le soleil, sa durée est de 29 jours 12 heures 44' 3". N° 49.

Mois solaire. Temps que le soleil emploie à parcourir un signe du zodiaque; sa durée moyenne est de 30 jours 10 heures 26". N° 162.

Mouvement. État d'un corps qui occupe successivement différentes places dans l'espace, par rapport à d'autres corps supposés fixes. *Mouvement uniforme*, n° 169. *Mouvement varié*, n° 170. *Mouvement annuel*, translation apparente du soleil dans l'écliptique, dans l'intervalle d'une année tropique, n° 29. *Mouvement diurne*, translation apparente de la sphère céleste autour de la terre, ou mouvement vrai de rotation du globe dans l'intervalle d'un jour. N° 2.

Moyen. Épithète que l'on donne ordinairement à toute quantité dont les accroissements sont uniformes et égaux dans les mêmes intervalles de temps; c'est ainsi que l'on dit *temps moyen*, *anomalie moyenne*, *longitude moyenne*, etc. On nomme *moyenne* entre plusieurs quantités, le résultat qu'on obtient en divisant leur somme par le nombre de quantités que l'on a considérées. C'est dans ce sens que

l'on dit *jour moyen*, *distance moyenne*, etc. (Voir ces mots.)

N.

Nadir. Point du ciel diamétralement opposé au zénith.

Nébuleuse. Amas de matière infiniment répandue dans toutes les parties du ciel. On suppose que ce sont des étoiles dans un état de formation encore imparfait. N° 5.

Néoménie. Nom donné à la lune lorsqu'elle est nouvelle.

Nœuds. Les deux points où l'orbite d'une planète ou d'une comète coupe le plan de l'écliptique. Le *nœud ascendant* est celui que l'astre traverse lorsqu'il s'élève vers le pôle boréal; le *nœud descendant* celui où l'astre perce l'écliptique lorsqu'il descend vers le pôle austral. La *ligne des nœuds* est la droite qui joint ces deux points.

Nombre d'or indique l'année du cycle lunaire. (Voir ce mot) n° 163.

Nord. L'un des quatre points cardinaux de l'horizon, celui vers lequel le pôle boréal est dirigé.

Normale à une courbe ou à une surface, c'est la perpendiculaire à la tangente à cette courbe ou au plan tangent à cette surface mené par le point de tangence.

Nutation, du mot latin *nutare*, balancer, mouvement périodique qui écarte l'axe terrestre de la perpendiculaire à l'écliptique, autour de laquelle il décrirait un cône par l'effet de la précession des équinoxes, n° 25. La nutation est produite par l'attraction de la lune sur la terre; son étendue est de $9''$,25, et sa période celle d'une révolution des nœuds de la lune. Il en résulte de légères variations dans l'obliquité de l'écliptique et dans la position des équinoxes qui auraient lieu sans elle et qu'on nomme *obliquité moyenne* et *équinox*

noxe moyen, pour les distinguer de l'obliquité et de l'équinox vrais. N° 233.

Nutation lunaire. Balancement de l'orbite de la lune semblable à celui de l'équateur terrestre et résultant de l'attraction de la terre sur le sphéroïde lunaire. N° 241.

O.

Objectif. Celui des verres d'une lunette qui est tourné vers l'objet qu'on observe.

Obliquité (de l'écliptique). Angle que forme l'équateur avec l'écliptique; il est sujet à une variation périodique qui provient de la nutation, n° 25, et à une petite inégalité séculaire qui fait varier lentement cette inclinaison de $0''$,4886 par an ou de $48''$ à peu près par siècle. N° 39 et 233.

Occident. L'un des quatre points cardinaux, celui vers lequel se opère le coucher des astres.

Occultation. Disparition d'une étoile devant laquelle passe la lune ou une planète.

Oculaire. Celui des verres d'une lunette ou se place l'œil de l'observateur.

Octant. Instrument d'optique employé à la mer pour prendre la hauteur du soleil ou la distance de la lune aux étoiles ou au soleil. N° 136.

Opposition. Situation de deux astres dont les longitudes diffèrent de 180° , ou, ce qui revient au même, dont la distance angulaire rapportée à l'écliptique, est de deux angles droits.

Optique. Science qui traite des phénomènes de la vision.

Orbe ou orbite. Ligne courbe que décrit un astre autour du centre de son mouvement.

Orient. Voir *Est*.

Oscillation. Mouvement d'un pendule, ou d'un autre corps qui va et vient en sens contraire.

Osculateur (cercle). C'est parmi tous les cercles qui ont leur centre sur la normale correspondante à un point donné d'une courbe et passant par ce point, celui qui dans les points voisins approche le plus de la courbe. Le centre et le rayon du cercle ainsi déterminés, se nomment *centre et rayon de courbure*, et la courbe qui passe par tous les centres de courbure se nomme la *développée*.

P.

Pallas. Planète télescopique découverte en 1802. N° 104.

Parabole. Courbe comprise parmi les sections coniques, et composée de deux branches qui s'étendent indéfiniment. Elle sert à calculer le mouvement des comètes qu'on croit apercevoir pour la première fois. N° 123.

Parallaxe. C'est proprement la différence entre le lieu apparent d'un astre et la position qu'il aurait si on l'observait du centre de la terre; ou ce qui revient au même, c'est l'angle sous lequel le rayon terrestre, correspondant au lieu de l'observateur, serait vu du centre de l'astre, N° 27. — **Parallaxe de hauteur,** c'est ce qu'il faut ajouter à la hauteur apparente d'un astre pour avoir sa hauteur vraie. — **Parallaxe horizontale,** celle d'un astre qui se trouve à l'horizon. — **Parallaxe annuelle** on du *grand orbe*, angle sous lequel le demi-diamètre de l'écliptique serait vu du centre d'un astre. N° 27.

Parallèles. Petits cercles de la sphère menés parallèlement à l'équateur, N° 2.

Paramètre. Dans les sections co-

niques, c'est la double ordonnée passant par le foyer.

Passage (au méridien). C'est l'instant où un astre traverse le plan du méridien; la lunette dont on se sert pour l'observer se nomme *l'instrument des passages*. N° 19. On appelle aussi du nom de *passage* un phénomène que présente une planète qui se projette sur le disque solaire.

Pendule. Voir *Horloge astronomique*.

Pendule simple. Appareil composé d'un point pesant suspendu à l'extrémité d'un fil inextensible. N° 20.

Penombre. Ombre incomplète qui, dans certains phénomènes, sépare la lumière de l'ombre véritable.

Périgée. Point de l'orbite lunaire, ou de l'orbite apparente du soleil, le plus rapproché de la terre.

Périhélie. Point de l'orbite d'une planète le plus rapproché du soleil.

Période. Intervalle de temps qui ramène un astre à la même position ou une quantité variable à la même valeur.

Perturbations. Dérangements qui écartent un astre des lois de son mouvement elliptique. On nomme *force perturbatrice* toute cause d'où résultent des perturbations dans le mouvement d'une planète, d'une comète ou d'un satellite. N° 180.

Pesanteur. Force qui fait tomber les corps à la surface de la terre et des planètes. N° 169. La pesanteur n'est qu'un effet de l'attraction, n° 179. Elle varie d'intensité à la surface de la terre, n° 70 et 173. Elle n'est pas la même à la surface des différentes planètes. N° 184.

Phases. Aspects divers que présentent la lune et les planètes selon la manière dont elles sont éclairées par le soleil.

Planètes. Corps célestes donés d'un mouvement propre d'Occident en

Orient, qui leur fait chaque jour changer de position relativement aux étoiles. N° 3. Lois générales de leurs mouvements, n° 106. Leur rotation, n° 89. Leurs inégalités, n° 186. Tableau de leurs éléments, n° 114.

Pôles. Points autour desquels semble s'exécuter le mouvement diurne de la sphère céleste. N° 2. Le *Pôle nord* est celui qui est élevé sur notre horizon ; le *Pôle sud* celui qui est abaissé au-dessous. *Polaire* se dit de tout ce qui appartient aux pôles ; ainsi, *étoiles polaires*, *cercles polaires*, etc. On nomme généralement *pôles*, les extrémités de l'axe autour duquel s'exécute le mouvement de rotation d'un corps. Les *Pôles* d'un grand cercle de la sphère sont les deux points qui se trouvent à 90° de tous les points de ce cercle.

Précession des équinoxes, phénomène qui résulte de ce que les points équinoxiaux ont sur le plan de l'écliptique un mouvement rétrograde, c'est-à-dire dirigé d'orient en occident en sens contraire du mouvement annuel du soleil, ce qui rend l'année tropique plus courte que l'année sidérale et change chaque année les longitudes, les ascensions droites et les déclinaisons des étoiles. N° 25 et 30. Explication de ce phénomène et ses lois. N° 232.

Printemps. L'une des quatre saisons de l'année. Elle commence à l'équinoxe du printemps, le 20 ou le 21 mars, et finit au solstice d'été le 21 juin.

Prisme. Solide compris sous plusieurs plans parallélogrammes, terminés de part et d'autre par deux plans polygones égaux et parallèles. Le *Prisme* est triangulaire lorsque sa base est un triangle.

Q.

Quadrature. Situation d'un astre

dont la distance angulaire au soleil rapportée à l'écliptique est de 90°.

Quart de cercle. Instrument connu des anciens qui sert à mesurer les hauteurs des astres, leur distance au zénith, leur déclinaison, etc. Il prend le nom de *quart de cercle mural*, ou simplement de *mural* lorsqu'il est fixé d'une manière invariable sur un mur exactement dirigé dans le plan vertical.

Queue. Amas de vapeurs que traînent après elles quelques comètes.

R.

Rayon. Ligne menée du centre d'un cercle à sa circonférence. *Rayon vecteur*, ligne menée du foyer de l'ellipse ou de la parabole à un point quelconque de son contour.

Réduction à l'écliptique ou à l'équateur. Calcul par lequel on déduit de la longitude d'une planète mesurée sur son orbite, sa longitude rapportée à l'écliptique ou à l'équateur.

Réflexion (de la lumière). Phénomène d'optique par lequel un rayon de lumière est repoussé lorsqu'il tombe sur une surface polie non transparente, n° 13. *Instruments de réflexion*, instruments fondés sur cette propriété de la lumière, et qui servent à prendre les distances et les hauteurs des astres à la mer. Voir les mots *Sextant* et *Octant*, n° 136.

Réfraction. Déviations des rayons lumineux lorsqu'ils traversent deux milieux d'inégale densité. N° 13. *Réfraction astronomique*, déviation qu'éprouve la lumière des astres en traversant l'atmosphère dont la terre est environnée. N° 145.

Réticule. Assemblage de fils qu'on introduit dans une lunette pour juger de l'instant précis où un astre se trouve au centre de la lunette. N° 16.

Rétrogradation. Mouvement apparent des planètes par lequel elles semblent, pendant une période de leur révolution, avancer contre l'ordre des signes. N° 76. — **Rétrogradation des points équinoxiaux.** (V. *Précession*.)

Rétrograde. Se dit du mouvement d'un astre dirigé en sens contraire du mouvement apparent du soleil, ou d'orient en occident, contre l'ordre des signes du Zodiaque.

Révolution. Période pendant laquelle un astre revient à la même position par rapport à un autre astre ou à un point déterminé de son orbite.

Rotation. Mouvement de révolution d'un corps qui tourne autour d'un axe.

S.

Saisons. Noms donnés aux quatre principales divisions de l'année.

Satellites. Planètes secondaires qui circulent autour de quelques-unes des planètes principales. Tels sont : La lune, relativement à la terre, n° 46. Les satellites de Jupiter, n° 90. Les satellites de Saturne, n° 97. Les satellites d'Uranus, n° 103.

Saturne. Planète située entre Jupiter et Uranus. C'était des planètes anciennement connues le plus éloignée du soleil, n° 95. Ses satellites, n° 97. Son anneau, n° 98. Ses inégalités, n° 190.

Scintillation. Espèce de tremblement particulier à la lumière des étoiles ; on l'attribue à la petitesse des diamètres, et aux vapeurs de l'atmosphère, n° 3.

Sécante. Ligne trigonométrique ; c'est le rayon qui passe par l'extrémité d'un arc, prolongé jusqu'à la tangente, menée à l'extrémité opposée.

Secteur. Surface comprise entre l'arc d'une courbe, et les deux rayons menés à ses extrémités.

Semaine. Période de sept jours. N° 62.

Sextant. Instrument de réflexion, employé dans les usages nautiques, sa construction est la même que celle de l'Octant, il n'en diffère qu'en ce que le secteur qui le porte est de 60° au lieu d'être de 45°. N° 136.

Sidéral (jour ou temps). C'est celui qui est marqué par le passage des étoiles au méridien. *Année sidérale*, c'est l'intervalle du retour apparent du soleil à la même étoile. N° 40.

Signe. S'emploie comme synonyme de constellation pour les douze constellations du Zodiaque.

Sinus. Ligne trigonométrique qui sert à mesurer les angles. C'est la perpendiculaire abaissée de l'extrémité d'un arc, sur le rayon qui passe par l'extrémité opposée. Le sinus d'un arc est par conséquent le moitié de la corde qui sous-tend un arc double.

Soleil. Astre autour duquel effectuent tous les mouvements de notre système planétaire. Mouvement apparent, n° 29. Sa constitution physique, sa rotation, ses taches, n° 44.

Solstice, ou station du soleil, époque à laquelle le soleil atteint sa plus grande hauteur, quand il est dans l'hémisphère boréal, et sa plus petite quand il est dans l'hémisphère austral. *Points solsticiaux*, ce sont les deux points de l'écliptique où se trouve le soleil quand il est dans les solstices. N° 31.

Sothiaque. Période de 1460 ans, qui ramenait les saisons aux mêmes jours de l'année civile dans le calendrier Égyptien. N° 159.

Sphère. Globe formé par la révolution d'un cercle qui tourne autour d'un de ses diamètres.

Sphéroïde. Se dit d'un solide qui diffère peu de la sphère.

Station. Position d'une planète lorsqu'elle semble s'arrêter pendant quelques instants avant de passer du mouvement direct au mouvement rétrograde, et réciproquement. N° 76.

Stationnaire. État d'une planète, lorsqu'elle est dans sa station N° 76.

Style. Verge d'un cadran.

Sud. L'un des quatre points cardinaux de l'horizon. Voir *Midi*.

Synodique. Mouvement qui ramène un astre en conjonction avec le soleil. *Mouvement synodique, révolution synodique*, etc.

Syzygie. Terme collectif, exprimant les conjonctions et les oppositions de la lune et du soleil. N° 49.

Système. Ensemble de plusieurs astres qu'on suppose soumis aux mêmes influences. — On donne aussi le nom de *systèmes* aux différentes hypothèses imaginées pour expliquer les mouvements apparents des corps célestes. N° 68 et 79.

T.

Tables (astronomiques). Recueils où l'on a calculé d'avance les positions des corps célestes pour certaines époques prises arbitrairement, et qui servent à déterminer ensuite par interpolation, et d'après les lois connues de leurs mouvements, leurs positions à une époque donnée.

Taches. Espaces différents du reste du disque que l'on remarque à la surface du soleil et des planètes, et qui par leurs déplacements ont servi à déterminer les durées de leur rotation. N° 44.

Tangente d'un arc, en trigonométrie c'est la perpendiculaire élevée à l'extrémité d'un arc sur le rayon qui passe par ce point jusqu'à

la rencontre du rayon qui passe par l'extrémité opposée.

Télescope. Instrument dans lequel les rayons lumineux sont rassemblés en foyer de l'*objectif*, par leur réflexion sur un miroir métallique. N° 18. Ou étend quelquefois ce nom générique à la lunette astronomique ordinaire, et même à tout instrument propre à faciliter la vue d'un objet éloigné.

Télescopiques (Planètes). Ce sont de petits astres qui échappent à la vue simple et qu'on ne peut apercevoir qu'avec le secours des lunettes ou des télescopes. N° 104.

Température du globe. Sa valeur moyenne n'a pas varié de $\frac{1}{700}$ de degré centigrade depuis 2500 ans. N° 230.

Temps. C'est l'impression que laisse en nous la succession des événements ou de nos idées. N° 20. Le mouvement est essentiellement propre à lui servir de mesure, n° 20. *Temps vrai, temps moyen*, n° 40 et 154.

Terre. Planète que nous habitons; elle est située entre Vénus et Mars; son immobilité n'est qu'apparente; elle a deux mouvements principaux, l'un de translation dans l'espace, n° 64; l'autre de rotation autour de son axe, n° 63. Sa figure, n° 220. Sa mesure, n° 224 et suivants.

Trajectoire. Ligne droite ou courbe que décrit un corps en mouvement.

Triangle. Espace compris entre trois lignes qui se coupent. Le triangle est *rectiligne* ou *sphérique* selon que ses côtés sont des lignes droites ou des arcs de grand cercle. Un triangle se compose de six parties, trois angles et trois côtés.

Trigonométrie. Science qui a pour but de déterminer trois des parties d'un triangle, les trois autres étant données. N° 21.

Tropiques. Petits cercles de la sphère parallèles à l'équateur et éloignés de $23^{\circ}28'$ de ce plan. Ils marquent, au Nord et au Sud, les limites des plus grandes déclinaisons australes et boréales du soleil. N° 31.

U.

Uranus. C'est de toutes les planètes, la plus éloignée du soleil; elle forme aujourd'hui la limite de notre système planétaire. N° 102.

V.

Variation. L'une des principales inégalités du mouvement de la lune. N° 51 et 196.

Vénus. Planète située entre Mercure et la terre. Son éclat est extrêmement vif et elle présente des phases comme la lune. N° 82.

Vernier. Instrument employé pour sous-diviser les instruments gradués, avant l'invention du micromètre extérieur. N° 16.

Vertical. Grand cercle de la sphère perpendiculaire à l'horizon, et passant par le zénith de l'observateur. Le premier vertical est celui qui passe par les points *Est* et *Ouest* de l'horizon.

Vesta. Planète télescopique découverte en 1807. N° 104.

Voie lactée. Espace blanchâtre ou nébuleux qui fait le tour du ciel et l'enveloppe comme une ceinture. N° 11.

Z.

Zénith. C'est le point du ciel où aboutit la verticale en chaque lieu du globe; le zénith et l'horizon varient pour tous les lieux de la terre.

Zodiaque. Zone de la sphère céleste qui renferme les orbites des sept planètes principales; sa largeur est de 18° environ, et elle est partagée en deux portions égales par l'*écliptique*. Le zodiaque est divisé en douze *signes* de 30° chacun, qui ont conservé le nom des constellations qui y étaient autrefois renfermées, n° 11. *Constellations zodiacales*; ce sont celles qui sont comprises dans le zodiaque, n° 11. *Lumière zodiacale*, voir le mot *Lumière*.

Zone. Partie de la surface d'une sphère comprise entre deux plans parallèles. La surface de la terre se divise en cinq zones principales, savoir: la *zone torride*, qui comprend les régions équatoriales; les *zones glaciales* qui environnent les pôles, et les *zones tempérées* qui sont comprises entre la zone torride et les zones glaciales. N° 34.

VA1 1517633

607423



Fig. 13.



Fig. 8.

es Hyades



Fig. 7.

Fig. 14.

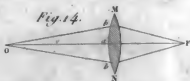


Fig. 15.

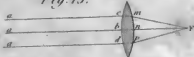


Fig. 16.

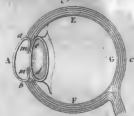


Fig. 17.



Fig. 18.



Disegnato per Adam.



Fig. 23.

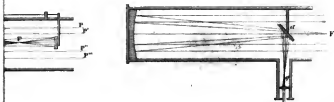


Fig. 26.

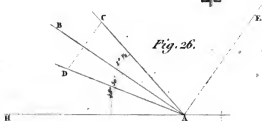


Fig. 29.

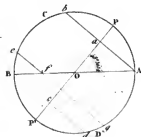


Fig. 30.

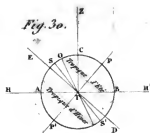
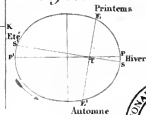


Fig. 36.



Fig. 33.



disegnato per Adam

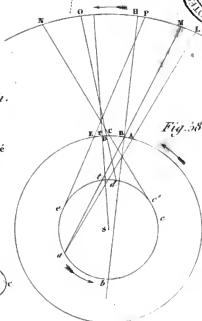
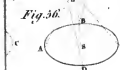
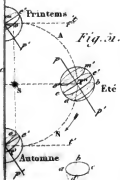
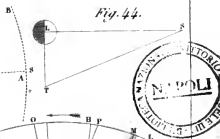
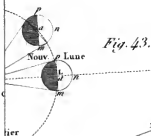
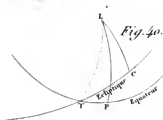
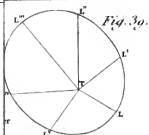
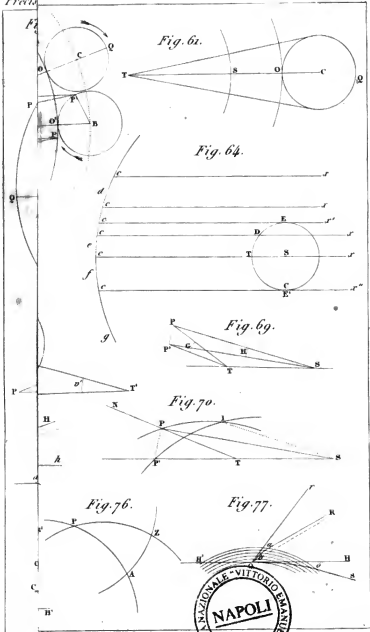


Fig. 57.

Jupiter
Pallas
Ceres
Juno
Vesta
Mars
La Terre
Venus
Mercure
Le Soleil

Gravé par Alon



Gravé par Adam.

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

Fig. 80.

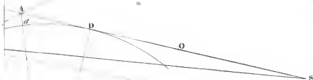


Fig. 85.

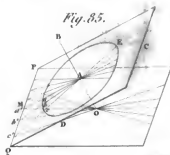


Fig. 84.

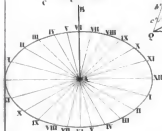


Fig. 93.

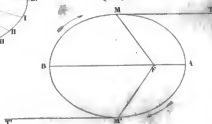


Fig. 92.

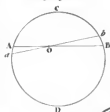
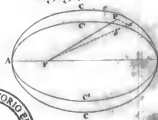


Fig. 94.



disegnato per A. Della Porta



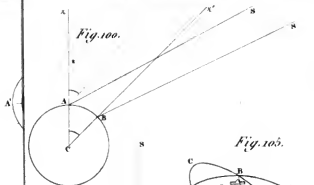


Fig. 104.

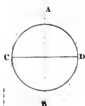


Fig. 105.

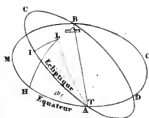


Fig. 106.

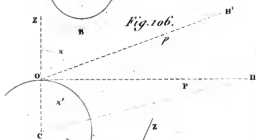
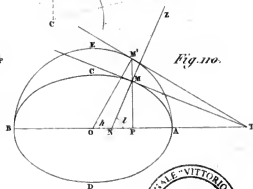


Fig. 110.



Gravé par Adam.



